

MEMORIE
D I
M A T E M A T I C A
E F I S I C A
D E L L A
SOCIETÀ ITALIANA
TOMO II. PARTE II.



V E R O N A
P E R D I O N I G I R A M A N Z I N I
M D C C L X X X I V .



NUOVA TEORIA

INTORNO AL MOVIMENTO DE' NAVIGLI A REMI

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

Sarei ben alieno dal riprodurre quest' argomento sotto gli occhi de' dotti, se altro non avessero fruttato le mie meditazioni fuorchè un nuovo metodo di maneggiarlo, e una perfetta conformità con le ricerche altrui ne' finali risultamenti. Non è già perchè non debba talora averfi in conto anche questo profitto, e ne' casi singolarmente in cui o la strada onde giugnere al medesimo fine è più breve, oppure, se qualche pratica vi si attenga, riesce ella più semplice e più naturale; ma qualche volta e in alcuni casi potrebbe giudicarsi abuso del tempo il rifare le cose fatte non con altro merito, che di averle rifatte in altra guisa. Ma avendo riconosciuto da gran tempo, che le indagini instituite sino a' dì nostri intorno alla navigazione a remi non erano ancor giunte a scoprire e mettere in chiaro tutti i segreti del remigare, mi sono ad altri principj appigliato, combinando la teoria col fatto, e facendo obbedire il calcolo al ragionamento e alle osservazioni, come nelle scienze fisico-matematiche dee farsi. Il che tutt' altro essendo che rifare il fatto, vo' ben credere, che non giudicheranno i Geometri immeritevole totalmente della loro attenzione questa nuova ricerca, la quale col ridurre l' argomento alla sua legittima condizione, toglie di mezzo ogni oscurità e controversia, in cui restava tuttora involta questa finissima parte della scienza del moto.

CAPITOLO I.

Introduzione.

§. 1. Attribuisce *Plinio* nel Lib. 7. Cap. 56 l' invenzione de' remi agli abitanti di due città della Beozia, oggi
Tomo II. Mmm

detta *Stramulipe*, i quali a suo dire diedero al remo il nome di $\kappa\acute{o}\pi\eta$, e alla pala, ch'è la parte larga, che percuote l'acqua, quello di $\pi\lambda\acute{\alpha}\tau\eta$. Ma vuol ragione non men di *Plinio* autorevole, che si creda contemporaneo il remo al primo avventurarsi degli uomini a discorrere su' galleggianti per fiumi e laghi, e pel mare costa a costa, molto prima che fosse chiamato in soccorso il vento; espediente più tardo, il quale suppone già abituati gli uomini ne' primi cimenti del remigare, men perigliosi dell'andar a vela. V'ha qualche popolo ancora nella sua originaria rozzezza, il quale facendo di sè puntello, rema con le pale nelle mani senza appoggiare il remo all'orlo della barca.

§. II.

Ma per quanto antica sia quest'arte di navigare, non so che prima di *Aristotele* si avvisasse alcun filosofo d'investigare i principj su cui è fondata, e il modo di calcolare l'economia delle forze, che agiscono in quella mirabile operazione. Il vulgo s'accheta nel travvedervi delle manovelle ordinarie in azione; quando realmente non s'ingerisce tal natura d'ordigno, ove non ha luogo un punto fisso, l'ipomoclio per la leva. E questa è la sorte ordinaria d'un'infinità di fenomeni familiari, in cui la dimestichezza coll'effetto fa credere triviale la causa, che lo produce; ed è poi ella da indagarli più ardua e difficile, che non si estima. Ma l'illusione giunge bene spesso a imporre anche agli uomini illuminati, finchè una fortunata riflessione non isquarcia il velo, e lascia scoprire la verità. In fatti troviamo nella 4. Quist. de' Meccan., che *Aristotele* parlando dell'operar de' remi dice *hypomoclion fit scalmus, stat enim ille; pondus vero mare est, quod propellit remus; vectem autem movens ipse est remex*. Prende egli dunque il remo come un vette di primo genere, che non può essere; poichè sarebbe necessario, che se ne stesse immobile il navilio, affinchè agitandosi dal rematore il remo ad un capo, e servendogli d'appoggio il navilio, avesse coll'altro a farsi l'impulsione dell'acqua, che secondo lui è il peso da moverfi. Nè con maggior felicità sono riusciti a sviluppare questa quistione coloro, che hanno preteso di ravvisarvi un vette di

secondo genere, come se l'acqua facesse figura di punto fisso, il che pure non è, non essendo ella altramente immobile, ancorchè resista di continuo all'impulsione del remo. Ma se vuol essere messo da parte il comune de' Meccanici, che si sono facilmente creduti fuor d'impaccio col ridurre all'azione delle leve l'atto del remare, merita riguardo e commemorazione ciò che n'hanno scritto alcuni de' più dotti e valenti uomini di questo secolo, in cui è asceso al più alto grado lo studio delle Meccaniche.

§. III.

Dopo il Sig. *Bouguer*, il quale nel suo eccellente libro, che ha per titolo *Traité sur le Navire*, versa su questa materia con molta penetrazione, prese a farne singolar trattazione il Sig. *Eulero* nelle Mem. della Reale Società di Berlino per l'anno 1747. Sembrando a quest'illustre Geometra incerte ed oscure le azioni de' rematori, imperfetta la teoria di *Bouguer*, e non manifesta la forza, con cui il navilio è promosso immediatamente, abbandona ogni considerazione propria e peculiare della cosa, e tutto si rivolge alle prime leggi della Dinamica. Con queste cerca prima di stabilire la relazione tra lo spazio percorso nel moto accelerato, cominciando dalla quiete, e la velocità acquistata finalmente, in modo però astratto sì che l'operar de' remi non v'entra per alcun conto. Passa quindi, dopo molte discussioni e rettificazioni, a trattare del moto uniforme del navilio. Di due equazioni, a cui si riduce, una è legittimamente dedotta. Ma intorno all'altra può ragionevolmente dubitarsi, se sia lecito il prendere per punto fisso la sponda del navilio, che non è assolutamente, e ch'egli medesimo rigetta nell'Introduzione; mentre l'uguagliare ch'ei fa nel moto uniforme (§. xxi. pag. 195.) il momento della forza intorno a questo punto col momento della resistenza al centro della pala, abilita il punto in questione tacitamente a far figura d'ipomoclio. Ad ogni modo è piena quella Memoria di bellissime considerazioni, e vi si scorge ad ogni passo l'ingegno sommo del Geometra in lotta con le difficoltà gravissime dell'argomento. Non è a mia cognizione, che dopo di lui sia stata presa questa materia da' suoi prin-

cipj, e affrontata in tutte le sue parti, come l' indole della
 cosa il richiede. Ne parlò per incidenza e alla sfuggita ne'
 suoi Opuscoli il celebre Sig. d' *Alembert*, e riportossi alla Me-
 moria sopraddeffa del Sig. *Eulero*. Nel 1753 fu coronata dall'
 Accademia Reale di Parigi una Memoria dell' illustre Sig.
Daniele Bernoulli intorno alla maniera la più vantaggiosa di
 fupplire all' azione del vento con un nuovo artificio di re-
 migare, come il trovo accennato dal Sig. *Krafft* nel Vol.
 XX. de' nuovi Comment. di Pietroburgo; ma non avendo
 quell' opera in potere non posso rendere al celebre Autore di
 lei la giustizia, che può meritarsi. Intraprende il Sig. *Krafft*
 a richiamare questa nuova maniera ai primi principj della
 Meccanica, e a paragonarla con l' ordinaria e fondamentale,
 fecondo ciò che n' ha scritto il Sig. *Eulero*, di cui preceden-
 temente. Ma di nuovo non avendo innanzi agli occhi, co-
 me ho detto, quella Memoria, nè avendo potuto formarme-
 ne chiara idea da ciò, che ne dice il Sig. *Krafft*, non pos-
 so neppure far incontro de' calcoli di questo, e delle conse-
 guenze che ne ricava. Si può per altro non senza fondamen-
 to asserire, che il meccanismo de' remi è tutt' altro da quel-
 lo, con cui si spinge l' acqua direttamente con appositi ordigni,
 come par che qui si faccia, sopra di che ha dottissimamen-
 te trattato assai prima del Sig. *Krafft* il Sig. Gio: Alberto
Eulero negli Atti di Berlino per l' anno 1764. Di modo che
 resta tuttavia dovuta l' intima discussione di quello al Sig. *Leo-*
nardo Eulero. Essendo assai grande il numero delle considera-
 zioni, da cui dipende una tale ricerca, & celles qui sont
connues, dice egli alla pag. 182 §. 3., *étant mêlées avec les*
inconnues, on ne fera plus surpris pourquoi cette matière a été
négligée jusqu' ici, & combien il est difficile de n' y tomber
point dans l' erreur. E molto più apparirà vero il sentimento
 di lui, se potrà questa mia indagine meritare di esser letta
 attentamente.

CAPITOLO II.

Principj del remigare .

§. IV.

Qualunque volta nel maneggiare un argomento astruso di Dinamica non si offre agevolmente e sta recondita l' intima legge de' movimenti , che vi si fanno , non è consiglio riprovato il ricorrere a' principj generali , e talora a certe cause finali , secondo le quali è stato osservato regolarli Natura costantemente , come sono la conservazione delle forze vive ; il minimo o delle azioni , o del tempo ; le vie brevissime , e simili leggi . Ma suole avvenire non di rado , che discoperti finalmente i principj naturali e proprj del soggetto , bisogna rinunciare alle teorie anche luminose , ch'eransi stabilite per l' innanzi o come troppo discordanti dalle vere , o come per sè insufficienti ad esaurire la materia . E accade ancora , che svanendo tutte le difficoltà , che traevano più che dalla cosa origine dall' improprio modo di trattarla , si sostituiscono felicemente a' mezzi di ragione elementi più sicuri , e al fatto non contrarj ; il che quanto contribuisca all' avanzamento delle scienze non v' ha per avventura chi non lo conosca . L' ho toccato con mano non ha molto nel meditare intorno al moto de' liquidi , dopo un lungo esercizio di osservazioni e sperienze fatte full' acque correnti . Ho lusinga , che la teoria , che n' ho tratto , introduca molto migliori aperture che non abbiamo in quell' oscurissima scienza ; del che farò parte alla Società , allorchè abbia menato a termine il lavoro . Mi fo intanto a dare qui un saggio di questa verità nel presente argomento intorno al moto de' navigli a remi , movendo i passi dalla cosa , piuttosto che dagli astratti lontanissimi principj della Dinamica .

§. V.

Cominciamo pertanto dall' esaminare l' azione del remo . Il remo offre tre situazioni notabili da considerarsi ; la prima è

M m m iij

quella ove il rematore applica la sua forza ; la seconda è la sponda del navilio su cui posa il remo ; e la terza è nella pala o parte più larga del remo , da cui è scacciata l'acqua . Distinguendo bene l'azione muscolare del rematore dal peso di lui , nella quale consiste propriamente la forza , che agita il remo , mentre il peso dell' uomo entra in massa col navilio , e fa parte del peso che debbe esser messo in moto , non è più una circostanza complicata (Mem. della Soc. R. di Berlino 1747. pag. 181.) l' essere contenuta la forza del rematore , e il trovarsi ella in azione nel navilio medesimo . Di modo che la forza reale applicata al remo è come se fosse immateriale o disgiunta dall' uomo , il quale come corpo pesante va tutto a carico del navilio ; e va pure a carico di lui , siccome vedremo , la pressione , che si fa dal rematore nel puntellarvisi , onde promuovere il remo ; il che non va confuso con la forza muscolare , ch' egli esercita sul remo medesimo . Fatto questo primo passo per rispetto al punto principale del remo , mettiamoci a considerare l' uffizio di lui nell' altre due situazioni . E quanto alla seconda , altro è l' adoperare una leva entro il navilio posto altronde in movimento ; nel qual caso il moto comune non turba altramente la legge della leva ; e tutt' altro è il caso del remo , che opera egli stesso pel movimento del navilio , sì che non può mai considerarsi la sponda , su cui insiste il remo , come un punto fisso mosso soltanto di moto comune al remo e al navilio , mentre è l' azione stessa del remo , che produce un tal moto . Non è dunque applicato il remo al navilio come ad un ipomoclio , siccome con *Aristotele* han creduto parecchi altri , ma sì bene ad una resistenza da vincere , ad un ostacolo da smovere , ch' è il navilio medesimo . Ma nè pur l' acqua , a cui s' applica la pala , non può averfi in conto d' ipomoclio , perchè il remo diventi un vette omodromo , avvegnachè la pala è in continuo movimento e cangiamento di sito , e non ne ha ella alcuno a cui corrisponda stabilmente un punto fisso nell' acqua agitata , come richiede la legge di un tal vette . E' dunque anche l' acqua un' altra resistenza da vincere , un altro ostacolo da smovere col remo . Ed eccoci intanto con questa discussione giunti a stabilire

Che il remo è realmente un ordigno interposto tra due ostacoli da muovere contemporaneamente in parti opposte, stando ad un capo di lui applicata la forza motrice.

E come ogni resistenza si misura con un peso, possiamo tanto per facilità far rappresentare da due masse pesanti il navilio spinto, e il volume dell' acqua smossa dalla pala; di modo che se la verga inflessibile AP (*fig. I.*) rappresenti il remo, la massa V il navilio, la massa A l' acqua, e abbiavi in P una forza destinata a dar moto al sistema in un dato piano con la direzione PB , la legge di questo moto è precisamente quella del remigare. Questa prima importantissima verità mette a suo luogo la quistione nelle Meccaniche, e lascia vedere come di natura sua voglia essere trattato l' argomento.

§. VI

E' facile da vederfi primieramente, ch' è necessaria una certa proporzione tra i pesi V , A e la potenza motrice P , affinchè prenda moto tutto il sistema. Imperciocchè, se fosse invincibile l' ostacolo A , diventando la verga una leva di secondo ordine, dovrebbe la potenza P al peso V avere pel movimento ragione maggior di quella, che ha l' intervallo VA all' intervallo PA ; e se il fosse l' ostacolo V , diverrebbe la verga una leva di primo ordine, e dovrebbe avere maggior ragione la potenza al peso A , che non ha l' intervallo VA all' intervallo VP . Ma essendo l' uno e l' altro un appoggio mobile, mentre resiste l' ostacolo V alla verga PA , perchè il peso A si muova verso n , e l' ostacolo A resiste alla medesima verga, perchè il peso V si muova verso m , cede continuamente l' uno e l' altro alla sollecitazione, e tutto il sistema si muove diversamente da quello che farebbero, se quegli ostacoli stessero a vicenda immobili un istante. Dovendo pertanto muoversi V , ed A contemporaneamente in parti contrarie, se sia (*fig. II.*) AA' la trasposizione istantanea di A , VV' quella di V , e PP' il viaggio della forza motrice, avrà la verga PA preso necessariamente la posizione PVA' , e vi farà un punto come M tra V ed A , che nella comune traslazione de' pesi, e della potenza non s' è punto nè poco mosso dal suo sito. Il punto M è dunque come un punto fisso, un centro spontaneo di moto, intorno a cui si sono contemperati in quell' istante i mo-

vimenti dell' intero sistema. Ed ecco risuldarci un punto nel remigare che in ogni impulsione del remo sta fermo ed immobile in aria, mentre il navilio avanza effettivamente, il qual punto non è costituito nè nel navilio, nè nell' acqua, ed è il reale centro del moto, che ho detto spontaneo, intorno al quale si bilanciano l' azione della potenza, e la resistenza del navilio e dell' acqua.

§. VII.

E perchè una medesima potenza P dee mettere in movimento entrambe le masse V , A contemporaneamente, forz' è, che la resistenza totale si divida in modo che ognuna di esse resista alla potenza con egual momento, perchè la più grave si mova meno della men grave, siccome conviene. In tal guisa la quantità del moto della potenza avrà una medesima ragione alla quantità del moto di ciascheduna massa. Ed ecco un altro principio in questa teoria, per cui si viene in cognizione, che il punto fisso, intorno a cui si fa il moto istantaneo nel remare, interposto tra la sponda del navilio e l' acqua, è precisamente il centro comune di gravità delle masse A ed V (*fig. I.*), equivalente l' una alla resistenza dell' acqua scacciata colla pala, e l' altra alla resistenza del navilio. Imperciocchè se sia M centro comune di gravità de' pesi A ed V (*fig. II.*), faranno tra di sè uguali i momenti $A . AM$, $V . VM$, e nel moto avrà $P . PP'$ una stessa ragione alle uguali quantità $A . AA'$, $V . VV'$, essendo tra di sè gli archi AA' , VV' , PP' descritti col centro M come i raggi MA , MV , MP .

§. VIII.

Trovato il centro spontaneo del moto M , tutto ci si appiana nell' investigazione della legge, con cui opera il remo. Imperciocchè facendo il punto M uffizio d' ipomoclio, dovrà stare per l' equilibrio la potenza in P all' ostacolo in V come MV a PM , e la potenza in P all' ostacolo in A come MA a PM ; e però essendo uguali i momenti $V . VM$, $A . AM$, dovrà essere per l' equilibrio, combinando insieme le resisten-

ze che controagiscono simultaneamente alla potenza P , il momento P . PM doppio del momento V . VM , oppure del momento A . AM ; risultamento importantissimo di cui faremo uso a suo luogo. Quindi apparisce, che oltre all'essere improprio il collocamento dell'ipomoclio sì alla sponda del navilio che nell'acqua per le ragioni, che abbiamo addotto al §. II, incorre l'uno e l'altro nel difetto eziandio di far nascere più movimento, che non v'è realmente per l'azione d'una stessa potenza. Per vederlo in fatto s'istituisca l'analogia, come PA a PM , così l'angolo PMP' all'angolo PAC , il quale sia sotteso dall'arco PC descritto col centro A e coll'intervallo AP . Di nuovo istituita l'analogia, come PV a PM così l'angolo PMP' all'angolo PVQ , col centro V , e coll'intervallo PV si descriva l'arco PQ sottendente l'angolo ritrovato PVQ . Siccome prendendo in cerchj disuguali angoli reciprocamente proporzionali ai raggi dei cerchj, riescono tra di sè uguali gli archi, che a quegli angoli sono sottesi, risulta da questa costruzione essere l'uno e l'altro arco PC , PQ uguale all'arco PP' . Ciò premesso, essendo l'arco PP' il viaggio fatto dalla potenza intorno al centro del moto M , mentre il navilio ha percorso l'archetto VV' , e il punto A della pala l'archetto AA' , se fosse stata appoggio fermo l'acqua in A , mentre la potenza avesse percorso uno stesso spazio PC di prima, descritto col centro A l'arco VD , farebbe stato VD il viaggio del navilio maggiore di VV' ; e se fosse stato appoggio fermo il navilio in V , mentre avesse percorso la forza lo spazio di prima PQ , farebbe il punto A della pala pervenuto in B facendo un movimento maggiore del vero AA' . E qui si rischiera maggiormente l'osservazione fatta intorno alla teoria del Sig. *Eulero* (§. III.). Non essendo altramente nel punto V nè appoggio, nè centro di moto, ma unicamente il sito d'una massa da moverli, a cui è applicato il remo, non può ivi in alcun caso cadere considerazione di momenti, nè bilanciamento di quantità di moto. E però tosto che non può avervi intorno ad V l'uguaglianza de' momenti assunta da quell'immortale uomo al §. XXI. non può nè pure aver luogo l'equazione che ne deduce; il che turba non poco la teoria di lui.

CAPITOLO III.

Del moto accelerato del navilio a remi

§. IX.

Premesso il vero e naturale principio, su cui è appoggiata la navigazione a remi, cominciamo a farne l'applicazione convenevole. E primieramente considerare e distinguere dobbiamo i differenti stati del navilio in movimento, così sopra un'acqua stagnante, come a ritroso, o a seconda d'un'acqua corrente. Imperciocchè dall'un canto principia egli sempre il suo moto dalla quiete, e va accelerandosi per gradi successivamente, condizione cui bisogna svolgere e conoscere intimamente; e dall'altro il fatto giornaliero dimostra, che il rematore dopo un breve intervallo di tempo dal principio del remare, prende e mantiene una certa equabilità e uguaglianza di azione, sì che il movimento del navilio si fa sensibilmente uniforme; altro stato essenziale, in cui bisogna necessariamente internarsi, giacchè si comprende agevolmente, che quell'accelerazione prima ha un limite, perchè la resistenza dell'aria e dell'acqua diviene sempre più energica quanto più la celerità s' aumenta. Quindi è che impresso al navilio un certo grado di velocità finale, con questa velocità concepita si conserva, e persevera la navigazione. Considereremo pertanto, ch' ella si faccia in acqua stagnante, e non farà poi difficile il trasportarla per ogni verso anche sull'acque correnti. E procedendo con ordine tratteremo prima del movimento disforme, cioè del movimento primo del navilio partendo dalla quiete, da cui passar debba al movimento equabile finale da mantenersi in appresso.

§. X.

E' fuor di dubbio, che movendo dalla quiete, e dovendo per gradi accelerarsi il navilio, la potenza applicata al capo del remo dee metter in moto la massa del navilio e quella

del remo; vincere lo sfregamento alla sponda; superare la resistenza dell' acqua, quella dell' aria, e per fin l' inerzia della parte di materia propria del rematore messa in moto con le braccia. Rappresentisi dunque il remo con la retta PR (*fig. III*) e sia in R il centro della pala, ove si riuniscono le resistenze, in P la forza motrice, in V la sponda del navilio, che dee in un con esso essere promossa dal remo. Considereremo qui come concentrato il navilio in V , come se il moto della sponda V fosse il moto stesso di lui, riferbandoci a fare in appresso la debita separazione di questi moti, che non vanno altramente confusi, come s'è fatto finora. E intanto si faccia

PV	a
VR	b
La forza motrice in P	F
L' inerzia della forza motrice	ω
La massa del navilio	M
La massa del remo	N
La potenza equivalente allo sfregamento costituita in p	P
La superficie anteriore del navilio, che fende l' acqua	f^1
La superficie del remo concentrata in R	g^2
L' altezza da cui scendendo un grave verticalmente acquista infine della discesa la velocità adattata a questo sistema di elementi del navilio	Z
L' altezza simile dovuta alla velocità della pala	y
Lo spazio, che dee percorrere il navilio di moto accelerato prima di giungere a quella velocità finale	S
Il tempo, che vi deve impiegare	T
S' intenda ora fatto dal sistema un piccolo movimento dalla quiete, sì che la forza motrice giunga in P' , il navilio in V , il centro della pala in R' . Sarà M il centro spontaneo di rotazione. Ed è certo, che non essendo le resistenze in V , R controagenti, ma puramente da mettersi in moto, si avrà l' accelerazione angolare dividendo il momento della forza motrice pe' momenti delle resistenze, che debbono rivolgersi intorno ad M . Ora in V l' intero ostacolo è composto della massa inerte del navilio M , e della resistenza dell' acqua all' essere fessa dalla prora, la qual resistenza si misura pel solido $f^2 (VV)^2$; e l' ostacolo in R viene dalla resistenza, che fa l' acqua all' essere smossa dalla pala, di cui è misura	

il solido $g^2(RR')^2$. E poichè i momenti di questi ostacoli debbono essere uguali tra di sè intorno al punto fisso M , dovrà essere $N + f^2(VV')^2 : g^2(RR')^2 = MR : MV$, e componendo

$M + f^2(VV')^2 + g^2(RR')^2 : g^2(RR')^2 = VR (= b) : MV$, e però farà $MV = \frac{g^2 b (RR')^2}{M + f^2(VV')^2 + g^2(RR')^2}$, e similmente

$MR = \frac{b (M + f^2(VV')^2)}{M + f^2(VV')^2 + g^2(RR')^2}$. Ma essendo VV' , RR' archi simili descritti col centro M , e co' raggi MV , MR farà

$MV : MR = VV' : RR'$ cioè $g^2(RR')^2 : M + f^2(VV')^2 = VV' : RR'$, ed essendo VV' l'elemento dello spazio S , farà

$g^2(RR')^2 = dS (M + f^2 dS^2)$, e $RR' = \sqrt{\frac{dS}{g^2}} (M + f^2 dS^2)$

che faremo intanto $= \mathcal{Q}$

Dunque $MV = \frac{g^2 b \mathcal{Q}^2}{M + f^2 dS^2 + g^2 \mathcal{Q}^2}$, $MR = \frac{b (M + f^2 dS^2)}{M + f^2 dS^2 + g^2 \mathcal{Q}^2}$

e l'intervallo PM dal punto di applicazione della forza motrice al centro M farà $= a + \frac{g^2 b - \mathcal{Q}^2}{M + f^2 dS^2 + g^2 \mathcal{Q}^2}$, e il momento della forza farà

$$(F - p) \left(a + \frac{g^2 b + \mathcal{Q}^2}{M + f^2 dS^2 + g^2 \mathcal{Q}^2} \right) = A$$

Determinato il numeratore della frazione che dee esprimere l'accelerazione momentanea del remo, fa d' uopo definire il complesso de' momenti pel denominatore. E primieramente essendo ω l'inerzia della forza motrice, la quale è costretta a muoversi con la stessa velocità della forza intorno al punto M , farà il suo momento $\omega \cdot \overline{PM}^2$; e per l'inerzia poi del remo, dovendo tutti i punti di lui rotarsi intorno ad M , converrà moltiplicare ogni particella materiale del remo pel quadrato di sua distanza dal punto M , onde averne il momento totale, e raccogliere in somma questi prodotti. E poichè questa somma può rappresentarsi dal prodotto di N , che è la massa del remo, nel quadrato d'una retta linea K , farà il momento d'inerzia del remo NK^2 . E poichè la resistenza dell'acqua dee vincerli con lo stesso moto rotatorio in-

torno ad M , con cui dee pure promuoversi la massa del navilio M , e vincerfi la resistenza della prora, farà il momento pel punto $V = (M + f^2 dS^2) \overline{MV}^2$, e il momento pel punto $R = g^2 \mathcal{Q}^2 \overline{MR}^2$. Lasciando dunque da parte la resistenza dell'aria, come cosa piccola in questo movimento, l'universale momento, che costituir debbe il denominatore, farà

$$\omega. \overline{PM}^2 + NK^2 + (M + f^2 dS^2) \overline{MV}^2 + g^2 \mathcal{Q}^2 \overline{MR}^2 = B$$

e però $\frac{A}{B}$ farà l'accelerazione iniziale del remo intorno ad M . Se

dunque si moltiplichino quest'espressioni per MV , farà $\frac{A. MV}{B}$ l'ac-

celerazione angolare del navilio in V . Ora essendo Z l'altezza dovuta alla celerità finale, che dee acquistare il navilio in fine dello spazio S , farà pe' principj della Meccanica

$$BdZ = AdS. MV$$

e integrando $Z = \int \frac{AdS. MV}{B} + \text{cost.}$, in cui $\frac{AdS. MV}{B}$ è funzione di dS , e costanti unicamente.

§. XI.

Questa è l'espressione della relazione tra lo spazio S , e l'altezza dovuta alla celerità finale, che avrà il navilio, percorso che abbia di moto accelerato un tale spazio partendo dalla quiete, nella qual espressione non si è nè fatta alcuna supposizione forzata, nè mendicato alcun principio straniero. Ma daremo qui un'altra soluzione di questo problema, la quale ci farà strada a determinare il tempo T impiegato a percorrere lo spazio S agevolmente. Se tutti gli ostacoli distribuiti, e applicati a diverse parti del remo fossero costituiti nello stesso punto P della forza motrice F , farebbe la forza acceleratrice assoluta espressa per una frazione avente F per numeratore, e le somme degli ostacoli per denominatore. Ma importando conoscere la forza acceleratrice al punto V , ov'è il navilio, si trasporti in V la forza motrice, facendo

$$MV:MP = F:\frac{F.MP}{MV}, \text{ e farà } \frac{F.MP}{MV} \text{ la forza motrice che sol-}$$

leciterà il navilio immediatamente in V , cioè $(F - p) MP : MV$, diminuendo la forza F per conto dello sfregamento (§. X.). Essendo pertanto accompagnata la forza F inseparabilmente dalla propria inerzia ω , farà ella primamente uno degli ostacoli da solleccitarsi dalla forza in V . A questo si aggiunga la massa del navilio, e la resistenza dell' acqua, l' aggregato delle quali abbiamo trovato essere $M + f^2 dS^2$, e sia di più N' l' inerzia del remo ridotta al punto V . In conseguenza avremo intanto in V il complesso $\omega + M + f^2 dS^2 + N'$. Resta che vi riduciamo la resistenza, che fa l' acqua al centro della pala.

Dovendo essere per natura del centro spontaneo M uguali i momenti delle resistenze costituite in V ed R intorno ad M , torna lo stesso per una potenza applicata in P il solleccitare nello stesso tempo l' ostacolo in V , e la resistenza attuale al punto R , ovvero la resistenza in V raddoppiata da muoversi intorno al punto M . E però invece di ridurre in V la resistenza della pala basta duplicare la resistenza $M + f^2 dS^2$ propria del punto V , sì che il complesso di tutti gli ostacoli ridotti in V farà

$$\omega + 2M + 2f^2 dS^2 + N'$$

Se dunque si divida la forza motrice $\frac{(F - p) MP}{MV}$ per tutto quest' aggregato di ostacoli, farà

la forza acceleratrice assoluta costituita in V . E se di nuovo si divida questa forza acceleratrice per la distanza VM , farà

la forza acceleratrice angolare, con cui l' angolo VMV' va crescendo, cioè mettendovi i valori di PM , VM farà questa forza espressa dalla formula

$$\frac{(F - p)(M + f^2 dS^2 + g^2 Q^2)(aM + af^2 dS^2 + (a + b)g^2 Q^2)}{b^2 g^4 q^3 (\omega + 2M + 2f^2 dS^2 + N')}$$

cui faremo per brevità $= C$.

Essendo dunque Z l' altezza dovuta alla velocità finale acquistata dopo percorso di moto accelerato lo spazio S , e pe' principj Dinamici stando $dZ : dS = 1 :$ alla forza acceleratrice,

avrà necessariamente luogo l'equazione $dZ = \frac{dS}{C}$, e integran-

do $Z = \int \frac{dS}{C} + \text{cost.}$ Come poi pe' medesimi principj è

$dS : \sqrt{Z} = dT$, farà integrando $T = \int \frac{dS}{\sqrt{Z}} + \text{cost.}$, ch' è il tempo impiegato a percorrere lo spazio S .

§. XII.

Siamo pertanto passati col navilio dalla quiete al conseguimento della velocità, che dee da esso conservarsi equabilmente in appresso. Ma l'equazione è unica, e due sono le variabili, ch'ella abbraccia, sì che, se altronde non si pervenga a conoscere o lo spazio S , o la velocità acquistata, tutto è indeterminato.

Sarebbe certamente far forza alla verità il trarsi d'impaccio per vie tortuose, mentre quella, che ci viene indicata da Natura, è diritta e piana. Giacchè dunque siamo usciti dall'accelerazione del moto, ed abbiamo conseguito la relazione tra lo spazio percorso di moto accelerato e la velocità finale, che dee mantenersi, ricorrere dobbiamo allo stesso moto uniforme del navilio, introducendo per la velocità di lui quella stessa, ch'è dovuta all'altezza incognita Z ; e come le leggi di questo moto uniforme sono ben diverse da quelle del moto accelerato, per mezzo di esse verremo in cognizione del valore Z , fermi tutti gli altri elementi supposti nel navilio. Allora sarà facile lo svolgere la formula precedente, e il trovare sì lo spazio S percorso di moto accelerato, e sì ancora il tempo impiegato, onde pervenire a quella tal velocità determinata. Per ora dunque lasceremo espressi così, come sono generalmente, gli elementi di forze, inerzie ecc. differendo l'appropriar loro più adattate espressioni, ed applicazioni immediate al caso di concretare la teoria, in cui faremo le correzioni convenienti alle formule poc' anzi trovate, onde avvicinarle al preciso operare della Natura. E non senza ragione mi sono astenuto dal farlo qui sul bel principio, siccome quelle,

che avrebbero resa sommamente involupata l'investigazione del moto accelerato.

CAPITOLO IV.

Del movimento equabile del navilio a remi.

§. XIII.

Or poi che il navilio ha conseguita la velocità finale dovuta all' altezza Z , ed è per conseguenza cessata ogni accelerazione, il moto impresso alle masse persevera, si perpetua per sè stesso, e proseguirebbe uniformemente, se la resistenza dell' acqua, e dell' aria non vi fosse. Bisogna dunque, che la forza motrice distrugga continuamente l' effetto di sì fatte resistenze, nelle quali non resta altramente perpetuato il movimento. Ma non sono queste sole le resistenze, nelle quali non resta egli perpetuato, e che sussistono a carico di lei anche nel moto uniforme. E' vero, che nel trasporto del navilio vien pure trasportata la massa del rematore, e quella del remo. Ma il moto comune non distrugge le accidentalità e le proprietà de' moti particolari, che si fanno nel navilio medesimo, sì che se la sponda regge il peso del remo, il rematore tuttavia nell' agitarlo entro la barca non viene sollevato in questo moto comune dal dispendio di forza, che dee impiegare nel moverlo. Lo stesso accade dell' inerzia del rematore stesso, la quale nella traslazione comune non cessa di rapire per sè una parte della forza motrice. Tutti questi oggetti vanno messi in conto, e convien farne estimazione a parte a parte. Intanto mi fo lecito di neglegere la resistenza dell' aria estremamente piccola in confronto di quella dell' acqua; e dell' altre faremo parola successivamente. Questo è il caso in cui ha luogo il grande principio di tutte le macchine suscettibili di riduzione a moto uniforme, cioè che la forza necessaria per conservarvi il moto è uguale precisamente a quella, ch' è necessaria per l' equilibrio, sia poi comunque si vuole celere o tardo il moto impresso; e perciò possiamo accingerci direttamente a questa seconda indagine, non avendo d' uopo che de' principj comuni della Statica per farlo.

lo. Ma se non abbiamo per questo verso gravi difficoltà da superare, è ben malagevole assunto il depurare la materia da ogni supposizione, e non ammettere nella teoria che cose di fatto, e quelle realmente, che sono immediatamente proprie della navigazione a remi. Il vedremo qui appresso.

§. XIV.

Il primo oggetto pertanto che ci si offre da considerare si è l'obblività variabile del remo nell'azione, obblività che affetta continuamente e modifica l'energia della potenza motrice. In fatti se sia *PMR* (*fig. III.*) la situazione del remo in atto di essere immerso con la pala nell'acqua, è certo, che in ogni istantaneo moto di lui, per cui passi nella situazione *pMr*, varia la direzione della forza in *P* per rispetto al remo, e varia pure l'angolo sotto di cui vien fatta con la pala l'impressione nell'acqua; il che rende mutabili ad ogni istante i momenti rispettivi relativamente al punto fisso *M*. Ma come il rematore agisce sempre parallelamente alla chiglia; così l'angolo variabile, che fa la direzione di lui col remo, è l'angolo stesso che fa il remo ad ogni istante con la chiglia; il qual angolo a mezzo la palata incirca è retto, e devia poi di qua e di là dal retto con tal legge, che se l'energia del rematore va crescendo dal principio dell'immersione fino a mezza la rivoluzione *PP'*, di là prende ella costantemente a decrescere per uguali gradi, finchè torna alla condizione di prima. Ora perchè la intera rivoluzione *PP'* è piccola, e di poco s'allontana dalla perpendicolarità con la chiglia la direzione del remo anche nella maggior declinazione, assumeremo senza timore di errare un certo angolo ϕ non molto minore di un retto, quasi fosse egli la costante direzione del remo con la chiglia nell'intera rivoluzione. Prendendo pertanto l'unità per raggio, e facendo $1 : \text{sen. } \phi = F : F \text{ sen. } \phi$, farà non già *F* la forza motrice, ma *F sen. ϕ* . E parimenti essendo per angoli obliqui non molto minori del retto l'impulsione che risulta dall'urto obliquo d'un fluido contro un piano, in composta ragione del piano, che la sostiene, del quadrato della velocità, e del

quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, farà la resistenza che incontra la pala non già g^2y , ma $g^2y \text{ sen.}^2\phi$.

§. XV.

Ciò premesso, un articolo ben più delicato ci si fa innanzi da svolgere; a torto non avvertito da chicheffia, intorno alla direzione del moto indotto nel navilio da' remi. L' esperienza giornaliera il dimostra, se la teoria nostra da per sé non lo palesasse con la scoperta che abbiamo fatto di un centro spontaneo di rotazione fuor del navilio, che si verifica nel remare, che esercitandosi il remo naturalmente e senza artificio del rematore da una sola parte del navilio, questo andrebbe realmente in giro, ben lontano dal prendere una direzione per linea retta, come gratuitamente si supponeva; al che non s' è fatto mai attenzione, quasi fosse per sé retto il movimento, che non è, senza l' ajuto di artifizj particolari che alla rettitudine il costringono. Sempre e in tutti i casi camminando per retta linea un navilio a' remi, egli è di moto composto, che si fa questo movimento retto. Imperciocchè se il navilio ha timone, e se sieno i rematori disposti da una parte, rettificasi da lui il cammino ad ogn' istante, si che tiene una via di mezzo il navilio tra due sforzi cospiranti. E se non v' abbia timone, sussistendo i rematori da una sola parte, essi non remigano continuamente a palata distesa e naturale, per cui andrebbe assolutamente in giro il navilio, ma sì bene torcono e rettificano essi medesimi il deviar del navilio dalla retta col ricevere destramente l' impressione spontanea dell' acqua su la pala, perchè rivolgasi a destra la chiglia, se il deviamiento di lei naturale fosse a sinistra, e per converso; di modo che fanno con le pale continuamente le veci del timone. Che poi vada il navilio di moto composto allorchè è sollecitato da uguali sforzi di rematori collocati a destra e sinistra, ella è cosa sì evidente, che non ha bisogno di dimostrazione. Questa realtà di moto composto non è poi sì indifferente, che messa in lume non porti un essenziale cangiamento nell' estimazione del viaggio del navilio, che ci allontana da tutto ciò, che i Geometri citati qui innanzi ci hanno lasciato scritto su questo

particolare. Sia pertanto V l'altezza da cui scendendo un grave di moto accelerato acquista in fine la velocità conveniente al punto V . E' certo che questa velocità appropriata al punto della sponda V , ove non è costituita che una delle forze laterali del sistema, non può mai attribuirsi al navilio, nè può ad esso assegnarsi il movimento solo dipendente dall'impulsione obliqua alla chiglia, ch'ei riceve in V , dovendo quello risultare in ogni caso dalla combinazione di quest'impulsione con un'altra, perchè il navilio s'incammini, e mantengasi nella voluta direzione. La velocità dunque di lui non essendo dovuta ad V , ma ad una funzione di V , che abbiamo detto Z , facciamoci a rintracciarla. Per farlo adeguatamente considereremo sempre il navilio promosso dalla combinazione di due remi collocati alle due sponde, potendo a due remi ridursi il sistema di quanti remi si vogliano combinati come vedremo. E come abbiamo per facilità assunto il simbolo ϕ per esprimere un certo angolo costante, che vuolì supporre fatto col remo sì dalla forza motrice, che dall'impresione dell'acqua in ogni palata; così prenderemo la lettera μ per denotare l'angolo che fa in V con una retta perpendicolare alla chiglia la direzione del moto del punto V nel navilio, mentre il sistema dall'una e dall'altra parte fa nel remigare una rivoluzione intorno al rispettivo centro spontaneo, ch'è fuori del navilio. Condotta perciò una retta AB (fig. IV.) per V perpendicolare alla chiglia, rappresentando PR , $P'R'$ le prime situazioni de' remi laterali, sieno $CV'A$, DVB gli angoli assunti μ ; e prolungando le direzioni VC , VD sì che concorrano in Q si espongano le Qb , Qc tra di sè uguali, le quali rappresentino le velocità \sqrt{V} de' punti V' , V del navilio. Condotte cN bN parallele a Qb Qc , e tirata la diagonale QN , farà ella la direzione, e velocità composta del navilio, com'è manifesto. Condotta bd perpendicolare a QN , farà l'angolo $Qbd = QVA$, e però con la Trigonometria si troverà $Qd = \text{sen. } \mu \sqrt{V}$; quindi $QN = 2Qd = 2 \text{ sen. } \mu \sqrt{V}$ farebbe l'assoluta velocità del navilio, se non dovesse ella incontrare altronde alcuna alterazione, di che nel paragrafo seguente.

§. XVI.

Non è possibile, che si renda efficace l'azione del rematore applicato al punto P del remo, se non v'abbia un punto fisso, che gli serva di appoggio. In fatti nell'atto di spinger oltre il remo si puntella egli co' piedi al navilio, e con quanta forza spinge il remo, con altrettanta respinge indietro il navilio medesimo. Il Sig. *Eulero* alla pag. 196. lin. 12. estima questa respinta all'indietro uguale all'intera forza del rematore, che per verità è molto maggiore del dovere. Imperciocchè si osservi attentamente il meccanismo del remare, e si vedrà che il rematore inclina il corpo all'innanzi, sì che nel puntellarsi non opera tutta la forza di lui direttamente nel far retrocedere il navilio. Rappresenti AB (*fig. V.*) l'inclinazione del rematore nel promuovere il remo con le braccia, e si conduca la verticale AC , e l'orizzontale BC . Una parte della reazione si esercita secondo la verticale AC , e l'altra BC rappresenta la retrocessione del navilio direttamente opposta al suo cammino secondo la chiglia. Secondo AC nasce un'immersione momentanea del navilio nell'acqua, percettibile anche al senso e reale, per cui cresce la superficie f^2 , che intendiamo esser diretta a solcar l'acqua. Se dunque vorremo nel computo trascurare quest'immersione, non sarà però lecito il far dare indietro il navilio secondo tutta la forza del rematore impiegata nello spingere il remo. Ma di più è contrario al fatto il supporre parallelo alla chiglia il moto indotto dal remo nel punto V , per il che abbiamo qui innanzi detto μ l'angolo obbliquo che fa quivi la direzione del moto con la perpendicolare alla chiglia; e però, qualunque siasi la forza che respinge, essendo il moto che ne risulta realmente nella direzione della chiglia, bisogna sottrarlo non dal movimento obbliquo del punto V , ma sì bene dal moto diretto secondo la chiglia, che viene indotto dalla co-spirazione delle forze laterali. Intanto se AB rappresenti la forza F sen. ϕ (§. XIV.) applicata al remo, e si chiami Δ l'angolo ABC ; sarà la forza BC che fa dar indietro il navilio secondo la chiglia $= F$ sen. ϕ cos. Δ , la quale pongasi $= f^2 M$; e però $2f^2 M$ sarà la forza respingente per conto de'

due remi laterali, cioè uguale ad un volume d' acqua avente per base la superficie f^2 del navilio, e per altezza $2M = \frac{2}{f^2} (F \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta)$. In conseguenza la forza assoluta, che dee essere uguale e contraria alla resistenza, resta di altrettanto debilitata, oppure a detta forza assoluta si aggiunge da vincere altrettanto di resistenza, quanto è quella forza, con cui è respinto il navilio. Ora essendosi trovato (§. XV.) $2 \text{ sen. } \mu \sqrt{V}$ per l' espressione della velocità del navilio per un pajo di remi, farà la resistenza di lui diretta e perpendicolare, indipendentemente dall' oggetto qui considerato, uguale a $f^2 4V \text{ sen.}^2 \mu$; alla quale dando questo nuovo aumento, se vogliasi non fare alcun diffalco dalla forza assoluta, farà manifestamente la resistenza totale $= f^2 \left(4V \text{ sen.}^2 \mu + \frac{2F \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta}{f^2} \right)$.

Al qual passo non giungo a comprendere, come si voglia poi (Mem: di Berlino sopracitate al §. XXV.) che, mentre il remo è in aria, possa aumentarli il movimento del navilio, stante che, mentre il remo è in aria, progredisce il navilio col moto impressogli mentre il remo è in acqua, moto in cui è già fatta la detrazione retrograda, e ch'è propriamente moto residuo; nè può altronde il navilio ricevere verun promovimento oltre a quello che ha già conceputo, essendo piuttosto disposto a ritardarsi, come vedremo qui appresso, mentre il remo è in aria, se la nuova impressione non rimettesse prestamente in vigore, e rianimasse il movimento.

§. XVII.

Abbiamo avvertito nel §. XIII, che non è la sola resistenza dell' acqua alla prora, cui debba superare la forza motrice nel moto uniforme, negletta quella dell'aria, avendovi pure l' inerzia del rematore, o una certa quantità di materia propria da muovere; e in oltre la resistenza per conto del remo da agitare. Ma quanto è stata ragionevole cosa il considerare la prima nel moto accelerato, come realmente abbiamo fatto col simbolo ω , una sola riflessione persuaderà che nel moto uniforme dobbiamo astenerci dal tenerne conto. Im-

perciocchè è incontrastabile , che l' equilibrio dipende dalla sola quantità delle forze impellenti , e niente fa al caso , che le forze follecitanti sieno o nò accompagnate dall' inerzia . Ma appunto il moto uniforme non con altra forza follecitante si mantiene , che con quella , ch'è necessaria per l' equilibrio (§. XIII.), in conseguenza l' inerzia di lei come in questo così nel moto uniforme del navilio non vuol essere considerata . Siccome dunque faremo nell' ultimo Capitolo un' estimazione convenevole della forza motrice , adattata all' uomo , possiamo qui ommettere ogni altra di lei modificazione continuando a lasciarla sotto il simbolo F . Resta dunque , che veggiamo qual resistenza provenga dal canto del remo . Ma è sì delicato per mio avviso quest' argomento , che non possiamo dispensarci dall' entrare per conto di lui in una più lunga discussione . Fatto sta primieramente che nella palata diversi sono gli accidenti del remo , e l' un dall' altro distinti sì nella posizione , che nel movimento . Ma quanto a ciò di cui andiamo in traccia , ch'è l' impressione sul navilio , è certo che tutto si riferisce a quell' istante in cui riceve egli l' impulso effettivo dal remo , e che gli altri sono in certa guisa stranieri all' oggetto principale , e puramente concomitanti . In un tempo tutto il remo è in aria ; in un altro egli è tutto in acqua . Di questi tempi non v' ha che una porzione sola del secondo in cui si esercita l' atto momentaneo dell' impulsione contro la sponda V ; il resto vi conduce , ma non opera attualmente . Compresa bene questa distinzione , a cui avremo occasione di ritornare in questo medesimo Capitolo , non possiamo confondere l' un con l' altro gli accidenti propri di ogni intervallo , essendo successivi non simultanei , sì che altro è l' esercizio della medesima forza motrice allorchè agita il remo in aria , l' attuffa nell' acqua , e dall' acqua il ritrae in separati tempi . Ma ancora dobbiamo riflettere a due particolari , cioè che il remo primamente è portato dalla sponda , e di più che il di lui centro di gravità cade ne' contorni dell' appoggio ; il qual bilanciamento non fa l' ultima cura de' buoni costruttori de' remi . In conseguenza per estimare adeguatamente la resistenza del remo si dee prima ben conoscere in che ella consista , indi come ne' diversi tempi della palata operi contro la forza motrice . Consiste ella dun-

que nell' opporre l' inerzia da superare, e l' attrito su la spon-
da . Imperciocchè essendo le parti del remo per costruzione
sensibilmente in equilibrio intorno all' appoggio, non v' ha
forza sensibilmente controagente, come farebbe se il centro di
gravità ricapitasse a distanza notabile dalla sponda ; per la
qual cosa l' inerzia sola entra a resistere , e lo sfregamento ,
come s' è detto . Ma l' una e l' altro debbono computarsi non
adoperare altramente contro la forza motrice nel piccolo tem-
po dell' impulsione reale , spiegandosi solamente in tutte le
altre agitazioni del remo concomitanti, che abbiamo da quel-
la accuratamente distinto . In fatti non è che in quel solo mo-
mento, che si verifica lo stato dell' equilibrio, cessata già o-
gni accelerazione , per la conservazione del moto equabile ,
come se non vi avesse moto ; e però quello essendo l' acciden-
te isolato, che dobbiamo estimare, cessa ogni considerazione
sì per parte dell' inerzia , che per conto dell' attrito , quasi
in quel momento stesse quieto il remo ; e l' una e l' altro poi
riassumono il loro vigore in tutti gli altri intervalli preceden-
ti e successivi, ne' quali non ha luogo la contemplazione dell'
equilibrio, e dee il rematore maneggiare effettivamente il re-
mo come corpo inerte, strisciarlo sull' appoggio, girarlo , il
che non fa al caso nostro, non entrando queste azioni del re-
matore, separate da quella, nelle nostre formule, in cui non
si valuta, che l' esercizio necessario per la conservazione del
moto equabile . Depurato pertanto quest' articolo , e cono-
sciuta la parte, che hanno queste resistenze nella palata, re-
sta nel moto equabile da mettersi a calcolo quelle sole resi-
stenze che fa l' acqua per opposti versi alla prora, e alla pa-
la, negletta l' aria, come faremo .

§. XVIII.

Ma se non è lo sfregamento del remo contro la sponda un
nodo in linea di attrito, uno ve n' ha, di cui non s' è fat-
to mai parola, il quale è ben altra cosa da quello, ed influisce
nelle estimazioni de' moti essenzialmente . Il navilio nell'
avanzare fa un solco più o men profondo secondo l' immer-
sione di lui nell' acqua, per cui si divide ella e striscia ai fian-
chi, e pel fondo . Non è egli questo il caso di un vero at-

trito, che costituisce una giunta di resistenza da vincere per la forza motrice, che non dovrebbe trascurarsi? Egli ha luogo e a remi, e a vela, e in qualunque modo si faccia la navigazione. Veramente ne hanno fatto cenno gl' illustri Signori d' *Alembert*, *Condorcet*, e *Bossut* nell' eccellente libro pubblicato del 1777, che ha per titolo *Nouvelles Experiences sur la resistance des Fluides*, ma non ne hanno intrapreso alcun valutamento. Il solo che abbia affrontato il quisto dopo quell' epoca, cioè nel 1778, è stato il Sig. *Eulero*, come può vedersi nelle Memorie della Real Società di Parigi di quell' anno. Ma non è l' opera di lui che un possente tentativo di mano maestra, e la materia vuol essere reagitata sì per le somme difficoltà, che l' accompagnano, e sì ancora perchè non è ristretta al caso de' navigli in moto, ma s' attiene in generale alla resistenza, che soffrono i corpi tutti nel muoversi pe' fluidi. Se non mi fossi proposto di svolgere questa teoria in modo, onde poterne fare immediata applicazione alla pratica, non sarebbe stato difficile l' introdurre nell' espressione precedente della resistenza un appropriato simbolo di più per questo conto. Ma sia permesso il prescindere per ora da questa particolare affezione de' navigli, finchè non meno la teoria di lei, che una delicata serie di esperienze n' abbia messo in chiaro lume l' estensione, e il vero valore. Sopra di che non lascerò con le mie scarse forze di adoperarmi in appressò, siccome ho fatto non senza frutto nell' indagine sul moto oscurissimo de' liquidi, che ho accennato nel principio del II. Capitolo di questa Memoria.

§. XIX.

Ora ci bisogna definire la quantità dello sforzo necessario in V , V' , onde superare la resistenza del navilio. Si ripigli pertanto la fig. IV, e rappresenti QN la forza assoluta uguale e contraria alla totale resistenza di lui che abbiamo determinato al §. XVI. Essendo bQ , cQ le direzioni delle forze uguali applicate in VV' concorrenti in Q , ed essendosi detto μ l' angolo QVA , compiuto il parallelogrammo $QcNb$, e condotta bd normale a QN , poichè

QN

$$\mathcal{Q}N = f^2 \left(+V \text{fen.}^2 \mu + \frac{2F \text{fen.} \phi \cos. \Delta}{f^2} \right), \text{ se si faccia}$$

$$\text{fen.} \mu : \text{fen.} T (= 1) = \mathcal{Q}d \left(= \frac{\mathcal{Q}N}{2} \right) : \mathcal{Q}b$$

si troverà che la formula (*A*)

$$(\textit{A}) \dots \dots f^2 \left(2V \text{fen.} \mu + \frac{F \text{fen.} \phi \cos. \Delta}{f^2 \text{fen.} \mu} \right)$$

è la parte di resistenza totale, che va a peso di ognuno ugualmente de' punti *VV'*, ove sono applicati i remi. La si faccia per brevità = \mathcal{Q} .

§. XX.

E qui per ultimo ci rimane da considerare un articolo importantissimo, prima di comporre gli elementi determinati qui innanzi. Certo è, che tanto nel moto accelerato quanto nell' uniforme, di cui trattiamo presentemente, essendo essenzialmente distinto in ordine al promuovere il navilio, l' operar del rematore nelle diverse azioni di un' intera palata, efficace soltanto in parte, sopra di che abbiamo ragionato diffusamente al §. XVII, si vede manifestamente che non è continua l'impulsione di lui; e però qualche cosa avvii di ascoso in questo, che merita dilucidazione, e che necessariamente importerà qualche modificazione ne' suddetti elementi. Io la concepisco in questa guisa. Fatta l' impressione del remo alla sponda del navilio, e lasciato questo a sè stesso, prende egli necessariamente a muoversi come un corpo lanciato in un mezzo resistente, perdendo ad ogni istante una parricella di sua velocità, sì che, come il fatto giornaliero lo comprova, passando per tutti i gradi di moto ritardato tornerebbe alla quiete di prima, se nuova forza non sopraggiugnesse a rimetterlo in movimento. Quanto più dunque è lungo l' intervallo inefficace, che passa tra un' effettiva impulsione ed un' altra, cioè quanto è più tardo il rematore nel rimettere in azione impulsiva il remo, tanto più perde di sua celerità il navilio, e vie maggior impulso si richiede per fargliela ripigliare. E parimenti quanto è più durevole e continuata l' impressione che fa la pala nell' acqua, relati-

vamente a detto intervallo inefficace o di nessuna sollecitazione, tanto meno si ritarda il navilio da un' impulsione all'altra, ovvero tanto più cresce l' effetto della forza motrice. In conseguenza, se si chiami T il tempo dell' inefficacia da un' impulsione all'altra, t quello della durata di un' impulsione effettiva, secondo la ragione di t a T andrà stimata l' energia della forza contro una resistenza data, o l' energia della resistenza contro una forza data. Di modo che, se sia F la forza, $\frac{t}{T}F$ potrà esprimere l' azione continuata nel solle-

citare la resistenza, oppure, essendo \mathcal{Q} la resistenza, $\frac{T}{t}\mathcal{Q}$ farà quello che diventa detta resistenza, mentre operi senza interruzione la forza F . Ed ecco che o moltiplicando la resistenza per la ragione $\frac{T}{t}$, o la forza per $\frac{t}{T}$, si supplisce all' interruzione, e torna lo stesso, come se l' impressione della pala fosse continua, e non restasse mai abbandonato a sè stesso il navilio. Convien dunque mettere ovunque nelle formule nostre $\frac{t}{T}F$ in luogo di F , oppure anche F' , posto

$\frac{t}{T}F = F'$; e farà perpetuamente F' la forza del rematore ridotta a continuità. Per questa via semplicissima si rimedia ad un' irregolarità, ch' è inevitabile nel movimento de' navigli a remi, e che contemplata sott' altro aspetto potrebbe involgere in gravi difficoltà il maneggio delle formule.

§. XXI.

Premesso tutto questo, facciamoci a considerare, che tre sono le incognite quantità principali, che dobbiamo determinare in questa teoria, cioè l' altezza Z dovuta alla velocità del navilio, l' altezza V dovuta alla velocità del punto V , e la corrispondente altezza y per la velocità della pala. E quanto alla prima, non è difficile cosa il vedere, che essendosi trovata (§. XVI.) l' espressione della resistenza diret-

ta e perpendicolare del navilio $= f^2 (4V \text{ sen. }^2 \mu + \frac{2F' \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta}{f^2})$

cioè uguale ad un volume d'acqua avente la superficie f^2 del navilio per base, e $4V \text{ sen. }^2 \mu + \frac{2F' \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta}{f^2}$ per altezza, farà manifestamente proporzionale quest' altezza al quadrato della velocità con cui si muove il naviglio; e però si avrà tosto l' equazione

$$(B) \dots 4V \text{ sen. }^2 \mu + \frac{2F' \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta}{f^2} = Z$$

§. XXII.

Questa ci fa strada ad un'altra agevolmente, siccome quella senza di cui non era possibile l' esprimere la vera velocità del centro della pala. E' vero che abbiamo espressa questa velocità in istato assoluto per \sqrt{y} ; ma conviene riflettere, che in tanto può essere attiva sul navilio questa velocità in quanto è maggiore di quella, con cui il navilio medesimo è incamminato, non essendo questo il caso del principiarli il moto dalla quiete. E' mestieri dunque che l' effettiva velocità della pala sia

$$\sqrt{y} - \sqrt{4V \text{ sen. }^2 \mu + \frac{2F' \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta}{f^2}} = B$$

Non può pertanto esprimersi la resistenza dell' acqua alla pala per $g^2 y \text{ sen. }^2 \phi$ (§. XIV.), ma sì bene per la formula $g^2 B^2 \text{ sen. }^2 \phi$. Posto ciò si ripigli il principio nostro fondamentale (*Cap. II.*); e poichè M (*fig. III.*) è il centro spontaneo, intorno a cui consideriamo farsi in ogni palata il movimento contemporaneo in parti opposte del navilio da V verso V' , e del centro della pala da R verso R' , il qual centro di moto è pur necessariamente centro di gravità degli ostacoli o delle resistenze costituite in V ed R (*ivi*), è manifesto che dette resistenze dovranno essere tra di sè in reciproca ragione delle velocità contemporanee de' punti V ed R . In conseguenza essendo \sqrt{y} la velocità del punto V , B

la velocità del punto R , farà $\mathcal{Q}:g^2B^2\text{ sen. }^2\phi=B:\sqrt{V}$, e però $g^2B^2\text{ sen. }^2\phi=\mathcal{Q}\sqrt{V}\dots(\Delta)$. Sostituendo pertanto in quell'equazione i valori di B e \mathcal{Q} si avrà l'equazione (C)

$$(C)\dots f^3\sqrt{V}(2f^2V\text{ sen. }^2\mu+F'\text{ sen. }\phi\cos.\Delta)-g^2\text{ sen. }^2\phi\text{ sen. }\mu$$

$$(f\sqrt{V}-\sqrt{(4f^2V\text{ sen. }^2\mu+2F'\text{ sen. }\phi\cos.\Delta)})^3=0$$

§. XXIII.

Ottenute due equazioni resta, che determiniamo la terza perchè col mezzo di tre equazioni tutta, siccome è evidente, possiamo svolgere e maneggiare la teoria, che abbiamo per mano. Ricorrendo pertanto al principio generale delle macchine pervenute al moto uniforme, di cui nel §. XIII, cioè che la forza necessaria per mantenerlo è quella precisamente che è necessaria per l'equilibrio, e combinandolo col nostro rifletteremo, che non avendo la forza motrice nel moto equabile del navilio a superare, come s'è detto, che la resistenza dell'acqua alla prora e alla pala per opposti versi, non abbiamo che ad eguagliare il momento della forza a quello delle resistenze per l'equilibrio. Intanto essendo (§. XIV.) $F'\text{ sen. }\phi$ l'espressione della forza motrice applicata in P (fig. III.), farà il momento di questa forza

$$F'.PM\text{ sen. }\phi=F'\text{ sen. }\phi(a\frac{1}{2}-MV).$$

Si è poi trovato essere \mathcal{Q} l'espressione (§. XIX.) della resistenza parziale contro cui dee agire la forza motrice col mezzo del remo in V ; e però farà $\mathcal{Q}.MV$ il momento di questa resistenza. Ma dovendo distribuirsi la forza così nel vincere questa resistenza, come nel superare la resistenza dell'acqua al centro della pala, e ciò contemporaneamente; per il che si è dimostrato essere il centro spontaneo M in situazione, onde rendere uguali tra di sè i momenti di queste resistenze; è manifesta cosa, che per l'equilibrio dovrà uguagliarsi il momento della forza motrice ad entrambi questi uguali momenti intorno ad M , oppure al doppio di uno qualunque di essi. In conseguenza bisognerà che sia per l'equilibrio, cioè pel caso del moto equabile del navilio il momento della forza $F'\text{ sen. }\phi(a\frac{1}{2}-MV)=2\mathcal{Q}.MV$. Ora per trova-

re il valore di MV , essendo divisa $VR = b$ in M in reciproca ragione delle resistenze situate in V ed R , se si faccia $Q + g^2 B^2 \text{ fen. } ^2\phi : g^2 B^2 \text{ fen. } ^2\phi = b : MV$, farà

$$MV = \frac{bg^2 B^2 \text{ fen. } ^2\phi}{Q + g^2 B^2 \text{ fen. } ^2\phi}. \text{ Sostituendo dunque nell' equazione}$$

precedente il valore di MV , e mettendo $\frac{Q\sqrt{V}}{B}$ in luogo di $g^2 B^2 \text{ fen. } ^2\phi$ (§. XXI.), si avrà l' equazione (D)

$$(D) \dots F' \text{ fen. } \phi (aB + (a + B) \sqrt{V}) - 2bQ\sqrt{V} = 0,$$

ch' è la terza ricercata

§. XXIV.

Ma non è un solo il rematore, che può al medesimo remo applicarsi; e può a' remi collocati in diverse situazioni del navilio applicarli diverso numero di rematori. Si chiami dunque n il numero totale de' rematori da una parte del navilio, n' il numero de' remi; è evidente che tutto può ridursi ad un sol remo concependolo afferrato da n rematori, e concentrando nella pala di lui un numero n' di superficie g^2 . In conseguenza per rendere generale la soluzione bisogna adattare le formule a tutti i casi, e però convien mettere da per tutto nF' in luogo di F' , $n'g^2$ in luogo di g^2 , sì che le equazioni nostre generali, rimessi i valori, faranno

$$(I) \dots \frac{1}{f^2} (4f^2 V \text{ fen. } ^2\mu + 2nF' \text{ fen. } \phi \cos. \Delta) - Z = 0$$

$$(II) \dots f^3 \sqrt{V} (2f^2 V \text{ fen. } ^2\mu + nF' \text{ fen. } \phi \cos. \Delta) - n'g^2 \text{ fen. } ^2\phi \text{ fen. } \mu (f\sqrt{V} - \sqrt{(4f^2 V \text{ fen. } ^2\mu + 2nF' \text{ fen. } \phi \cos. \Delta)})^3 = 0$$

$$(III) \dots anF' \text{ fen. } \phi \text{ fen. } \mu (f\sqrt{V} - \sqrt{(4f^2 V \text{ fen. } ^2\mu + 2nF' \text{ fen. } \phi \cos. \Delta)}) + fnF' \text{ fen. } \phi \text{ fen. } \mu (a + b) \sqrt{V} - 2bf (2f^2 V \text{ fen. } ^2\mu + nF' \text{ fen. } \phi \cos. \Delta) = 0$$

§. XXV.

In queste tre equazioni abbiamo la soluzione completa della quistione, e in tutto il rigore matematico, che può esse-

re compatibile con l' estrema complicazione de' fisici elementi, che vi sono mescolati necessariamente. Prima pertanto di passare ad alcuna estimazione assoluta de' simboli introdotti, giova che ci fermiamo alquanto su la risoluzione generale di queste equazioni. E primieramente quanto alla velocità assoluta della pala dovuta all' altezza y possiamo agevolmente ricavarla dall' equazione (D) (§. XXIII.). Imperciocchè essendo da questa equazione

$$B = \frac{2bQ - (a+b)F' \text{ sen. } \phi}{aF' \text{ sen. } \phi} \sqrt{V} = \sqrt{y} - \sqrt{(4V \text{ sen. } ^2\mu + \frac{2F' \text{ sen. } \phi \cos. \Delta}{f^2})} \quad (\S. \text{ XXII.})$$

generalizzando la forza secondo un numero n di rematori farà

$$\sqrt{y} = \frac{f\sqrt{V}(4bf^2V \text{ sen. } ^2\mu + 2bnF' \text{ sen. } \phi \cos. \Delta - n(a+b)F' \text{ sen. } \phi \text{ sen. } \mu)}{afnF' \text{ sen. } \phi \text{ sen. } \mu} + \frac{anF' \text{ sen. } \phi \text{ sen. } \mu \sqrt{(4Vf^2 \text{ sen. } ^2\mu + 2nF' \text{ sen. } \phi \cos. \Delta)}}{afnF' \text{ sen. } \phi \text{ sen. } \mu}$$

valore, il quale dipende dalla velocità \sqrt{V} , siccome è naturale, come da essa pure dipende la determinazione della velocità \sqrt{Z} del navilio (§. preced.), e dagli altri valori asfunti. Dobbiamo dunque rivolgerci a ricavare dalle equazioni precedenti l' equazione in V , che ci bisogna. Si ripiglino pertanto le equazioni (Δ) (§. XXII.), e (D) (§. XXIII.), che più agevolmente possono maneggiarsi, e non difficilmente, scacciando la lettera B , si perverrà all' equazione seguente

$$g^2V(2bQ - (a+b)F' \text{ sen. } \phi)^2 = a^2F'^3 Q \text{ sen. } \phi$$

sostituendo in questa il valore di Q (§. XIX.); e ponendovi il simbolo secondo il numero n de' rematori, e il numero n' de' remi, si avrà l' equazione finale in V della forma (R) (R) ... $n'g^2V(4bf^2V \text{ sen. } ^2\mu + 2bnF' \text{ sen. } \phi \cos. \Delta$

$$- (a+b)nF' \text{ sen. } \phi \text{ sen. } \mu)^2 - a^3n^3F'^3 \text{ sen. } \phi \text{ sen. } ^2\mu(2f^2V \text{ sen. } ^2\mu$$

$$+ nF' \text{ sen. } \phi \cos. \Delta) = 0$$

ed eccoci pervenuti alla finale equazione, dalla cui risoluzione dipende lo sviluppamento dell' intera teoria siccome il vedremo ne' seguenti Capitoli.

CAPITOLO V.

Rettificazione degli elementi assunti nel moto accelerato del navilio.

§. XXVI.

Ci atterremo alla soluzione, che abbiamo dato di questo quesito al §. XI. cui bisogna qui ripigliare con la fig. III. Ed in primo luogo dobbiamo considerare il punto V come sponda del navilio, a cui è applicato il remo, separando, siccome abbiamo fatto nel Cap. precedente, il movimento di questa da quello di lui ch'è composto (§. XV.) di due combinati insieme. E però cominceremo dal modificare la forza motrice F operante sul remo in P coll'angolo di direzione ϕ , sì che intendendo di ridurla al punto V , diverrà

$\frac{MP}{MV} \cdot F \text{ sen. } \phi$ la vera forza sollecitante il navilio in V immediatamente ; ma non dobbiamo qui tralasciare di debilitare questa forza per conto dell' attrito del remo alla sponda, come s'è fatto nel §. XVII, perchè non ha luogo la considerazione nè del moto equabile ivi contemplato, nè quella dell'

equilibrio equivalente, e però farà ella $\frac{MP}{MV} (F - p) \text{ sen. } \phi$,

cioè $\frac{MP}{MV} (F' - p) \text{ sen. } \phi$, ridotta a continuità (§. XX.). Ma

come s'è fatto della forza motrice, così fa d'uopo determinare, e ridurre in V il complesso di tutti gli ostacoli distribuiti per diverse parti del remo, dandolo ivi a carico della forza ; di modo che dividendo questa per tale complesso si abbia la forza acceleratrice assoluta costituita in V . L'inerzia intanto inseparabile dalla forza motrice, ch'è l'uomo, il quale dee muovere una parte di sè stesso, s'è detta ω , ed accompagna in V la forza nel trasporto di lei dal punto P ; nè possiamo trascurarla come nel caso del moto equabile (§. XVII.). Ma non possiamo neppure trascurare l'inerzia

del remo, cui abbiamo detto N , e però riducendola al punto V , se fosse questo punto sensibilmente distante dal centro di gravità di lui, la si denomini N' , sì che $\omega + N'$ farà l'aggregato di queste due resistenze in V . Resta da mettervi la massa, e le resistenze del navilio alla prora, e alla pala nel cacciar l'acqua. Ma come abbiamo necessariamente assunto il sistema di due remi uno a destra, e l'altro a sinistra della direzione della chiglia (*fig IV.*), non può darli a carico di ciascheduna delle forze in V , V' , che la metà della massa M del navilio; e però di nuovo per conto di un remo farà $\omega + N + \frac{M}{2}$ il complesso degli ostacoli in V , non computate ancora le resistenze dell'acqua.

§. XXVII.

Quanto dunque alla resistenza per parte della pala, sarà ella nel centro $R = g^2 \text{ sen.}^2 \phi (RR')^2$ (§. X. *fig. III.*). Ma facendo $VM: MR = g^2 \text{ sen.}^2 \phi (RR')^2$: ad un quarto proporzionale, sarà $\frac{MR}{VM} \cdot g^2 \text{ sen.}^2 \phi (RR')^2$ l'espressione di detta resistenza trasportata in V . E quanto alla resistenza per parte del navilio dobbiamo definire la parte, che cade a carico di un remo nel punto V . Per ciò fare esattamente dobbiamo considerare, che lo spazio iniziale dS percorso dal punto V in un tempetto infinitamente piccolo può assumersi come fatto di moto uniforme. Per la qual cosa ripigliando il ragionamento fatto nel §. XIX del Cap. precedente, e rifacendo la costruzione ivi esposta pel moto uniforme finito, si troverà pel piccolo moto uniforme iniziale del navilio, che se esprimasi con lo spazio iniziale dS la velocità del punto V , la velocità del moto composto di lui in quel medesimo tempetto farà $2 \text{ sen.} \mu dS$, e però $f^2 + \text{sen.}^2 \mu (dS)^2$ la resistenza di lui perpendicolare e diretta. Ma torna lo stesso o si detragga dalla forza, che dee vincere questa resistenza, quell'azione che si esercita nel far retrocedere co' piedi il navilio, di che s'è parlato nel §. XVI, o si aggiunga altrettanto di resistenza a peso di detta forza, quant'è l'azione con cui è respinto

to il navilio ; e però essendosi trovato (§. XVI.) essere la forza respingente per conto di due remi $2F' \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta$, farà ella in questo caso $n(F' - p) \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta$, e però

$f^2 (4 \text{ sen. }^2 \mu (dS)^2 + \frac{2 (F' - p) \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta}{f^2})$ farà la resistenza

totale del navilio nel primo moto elementare. Facciamo pertanto, che QN (fig. IV.) rappresenti, come prima, questa resistenza totale. Operando come nel §. XIX. troveremo, che la formula

$$f^2 (2 \text{ sen. } \mu (dS)^2 + \frac{(F' - p) \text{ sen. } \phi \text{ cos. } \Delta}{f^2 \text{ sen. } \mu}) = R$$

rappresenta la resistenza parziale del navilio, che va a carico di ognuno de' punti laterali V , V' ove sono applicati i remi.

§. XXVIII.

In conseguenza la somma di tutti gli ostacoli trasportati in V farà

$$\omega + N + \frac{M}{2} + \frac{MR}{VM} \cdot g^2 \text{ sen. }^2 \phi (RR')^2 + R = L.$$

Dividendo pertanto la forza motrice $(F' - p) \text{ sen. } \phi \cdot \frac{MP}{VM}$ per

questo aggregato, farà $\frac{MP (F' - p) \text{ sen. } \phi}{VM \cdot L}$ la forza acceleratrice assoluta costituita in V . E se di nuovo si divida questa forza acceleratrice per la distanza VM , farà $\frac{(F' - p) \text{ sen. } \phi \cdot MP}{VM^2 \cdot L}$

la forza acceleratrice angolare. Resta dunque, che si determinino le MR , MP , VM , RR' in valori della quistione. E' certo pertanto, che dovendo essere intorno al centro spontaneo M uguali i momenti delle resistenze costituite in V ed R , dovrà la linea VR , che abbiamo detta b , intendersi divisa in M in reciproca ragione di dette resistenze. E però, essendo $g^2 \text{ sen. } \phi (RR')^2 = I$ la resistenza in R , e $\frac{M}{2} + f^2 (2 \text{ sen. } \mu$

$(dS)^2 + \frac{(F' - p) \text{sen. } \phi \cos. \Delta}{f^2 \text{sen. } \mu} + N' = H$ il complesso delle resistenze parziali del navilio concentrate in V , lasciando sussistere in P la forza accompagnata della sua inerzia ω , se si faccia

$$H + I : I = b : VM$$

$$H + I : H = b : MR$$

$$\text{farà } VM = \frac{bI}{H + I}, MR = \frac{bH}{H + I}, \text{ e}$$

$$VM : MR = I : H = VV' : RR' = dS : RR'$$

e però $I \cdot RR' = H \cdot dS = g^2 \text{sen. }^2 \phi (RR')^3$, e $RR' = \sqrt[3]{\frac{H \cdot dS}{g^2 \text{sen. }^2 \phi}}$. Se dunque si ponga nell' espressione I il valore di RR' , diverrà ella

$$\sqrt[3]{H^2 dS^2 g^2 \text{sen. }^2 \phi} = I'$$

$$\text{Quindi } VM = \frac{bI}{H + I'}, MR = \frac{bH}{H + I'}, \text{ e } MP = VM + PV = a$$

$$+ \frac{bI}{H + I'} = \frac{aH + aI' + bI}{H + I'}. \text{ Posti tutti questi valori nell'}$$

espressione antecedente L , diverrà ella $\omega + 2N' + M + 2R$, e l' espressione della forza acceleratrice angolare farà

$$\frac{(F' - p) \text{sen. } \phi MP}{VM^2 \cdot L} = \frac{(F' - p) \text{sen. } \phi (aH + aI' + bI)(H + I)}{bI(\omega + 2N' + M + 2R)} = K$$

funzione di dS , e quantità invariabili del quesito. Ora Z è l' altezza dovuta alla velocità finale acquistata dopo che sia percorso dal navilio lo spazio S ; ed è pe' principj di Dinamica $\frac{dS}{dZ}$ uguale alla forza acceleratrice K . Dunque si avrà

l' equazione $\frac{dS}{dZ} = K$, e $\frac{dS}{K} = dZ$, e integrando

$$(P) \dots Z = \int \frac{dS}{K} + \text{cost. arb.}$$

§. XXIX.

Se dunque sia come prima n il numero de' rematori, n' il numero de' remi da una parte del navilio, e si metta nel valore di K $n(F' - p)$ in luogo di $F' - p$, $n'g^2$ invece di g^2 , e vi si mettano gli altri valori di H , I , ed R , sì che K diventi K' , dopo tutte queste sostituzioni farà

$$(P') \dots Z = \int \frac{dS}{K'} + \text{cost. arb.}$$

l'equazione di relazione tra S e Z . In conseguenza (§. XI.) il tempo finito impiegato nel percorrere questo spazio si trarrà dall'equazione

$$T = \int \frac{dS}{\sqrt{Z}} + \text{cost. arb.}$$

§. XXX.

Ed ecco risolta in tutta la sua estensione anche la parte di questa teoria, che riguarda il principio del moto del navilio a remi principiando dalla quiete. Imperciocchè avendo separato questa dall'altra, in cui il navilio prende e conserva il moto uniforme con la velocità acquistata in fine della primitiva accelerazione, e avendole trattate entrambe co' principj proprj, non resta che a collegarle insieme per mezzo del comune elemento \sqrt{Z} , che è la velocità finale acquistata dal navilio dopo percorso di moto accelerato lo spazio S , e diventa poi la velocità costante nel successivo moto uniforme. Ma il valore di Z è sempre in pronto dall'equazione (I) del §. XXIV, in cui dietro alla risoluzione dell'equazione (R) del §. XXV fatti sostituire il valore di V , e però non si avrà che a integrare la funzione differenziale $\frac{dS}{K'}$ della sola variabile S , onde avere in quantità cognite lo spazio S ; e tosto poi anche il valore del tempo T .

CAPITOLO VI.

Riduzione della teoria al fatto, e applicazione alla pratica.

§. XXXI.

Sciolti i nodi più complicati intorno al movimento de' navigli a remi, or ci bisogna venire al fatto, e avvicinare la teoria a ciò che realmente accade in questa sorta di navigazione. E primieramente è mestieri che ad alcuni simboli delle nostre formule si dia un conveniente valore assoluto per tutti i casi, lasciando indeterminati gli altri, sì che sieno suscettibili di valore diverso secondo i diversi casi. Ripigliamo pertanto l'equazione (R) (§. XXV.)

$$\begin{aligned}
 (R) \dots n'g^2 (4bf^2 V \text{sen.}^2 \mu + 2bnF' \text{sen.} \phi \cos. \Delta \\
 - (a + b) nF' \text{sen.} \phi \text{sen.} \mu)^2 \\
 - a^2 n^3 F'^3 \text{sen.} \phi \text{sen.}^2 \mu (2f^2 V \text{sen.}^2 \mu \\
 + nF' \text{sen.} \phi \cos. \Delta) = 0
 \end{aligned}$$

ch'è finalmente il cardine di tutta la teoria, e veggiamo in primo luogo di sostituire numeri assoluti in luogo de' simboli ϕ, μ, Δ . E quanto alla lettera ϕ , esprime ella l'angolo, che fa la direzione del remo con la chiglia (§. XIV.), il quale realmente è variabile, come si è detto. Ma avendo fatto osservazione accurata sull'escursione del capo interno di un remo in azione in una Veneta Galera, mi sono accertato che non arriva mai il remo alla sua massima e più forzata obbliquità a fare un angolo con la chiglia maggiore di 76 gradi; e però se per un medio costante si assuma un angolo di 80, saremo più vicini al vero, che non avverrebbe pigliando la direzione di lui sempre perpendicolare (Mem. di Berl. pag. 197.), sì che essendosi presa l'unità per raggio potrà pigliarsi $\text{sen.} \phi = \frac{49}{50}$. Quanto poi all'angolo μ che fa in V

(fig. IV.) la direzione del moto del punto V nel navilio con la retta AB perpendicolare alla chiglia, si rifletta, che tenendo il punto V a muoversi intorno al centro spontaneo M (fig. III.) è giusto che si pigli per la direzione di lui la tangente DV all' arco ch' egli prende a descrivere, la quale è perpendicolare al remo PR in V . In conseguenza prolungando RP finchè s' incontri con la chiglia TS in S , farà l'angolo $DVT = \text{ang. } TSV$, cioè $\mu = \phi$. E come questo si assume costantemente di 80° , potrà pure quello pigliarsi di tal valore, e però farà anche sen. $\mu = \frac{49}{50}$ senza timore di errore.

Resta dunque il solo cos. Δ da definirsi (§. XVI.). Ho voluto su questo pure istituire qualche osservazione in questo modo. Vedendo che l'angolo Δ era sommamente variabile, dipendendo dal più o meno d'inclinazione che fa di sè l'uomo nel distenderli col corpo spingendo il remo, presi a riconoscere la relazione tra le due linee (fig. V.) AC , BC calando un perpendicolo dall'estremità delle mani stesse del rematore in azione sino al pavimento del navilio, e trovai avere la AC or maggiore, or minor ragione alla BC secondo le varie, e non determinabili circostanze sì del navilio, che del remare. Quindi è che senza alcuno scrupolo assumeremo quelle per eguali, e Δ per un angolo semiretto in via di angolo medio costante. Sarà dunque cos. $\Delta = \frac{7}{10}$ prossimamente.

Sostituendo questi valori nell'equazione (R), si otterrà un'equazione non contenente, che gli elementi naturali e propri del navilio, secondo il caso; equazione che alla massima generalità unisce tutto il rigore possibile in sì fatta materia.

§. XXXII.

Ma essendomi proposto di svolgere diversi casi di questa teoria, a solo titolo di schifare l'inutile fatica di lunghe numeriche calcolazioni, supporremo per facilità negli esempj, che gli angoli di direzione ϕ , μ sieno retti, e sia $\Delta = 60^\circ$. L'equazione (R) si trasformerà nell'equazione (S)

$$(S) \dots 128b^3 f^6 n' g^2 V^4 - 96ab^2 f^4 n F' n' g^2 V^3$$

$$+ 24a^2 b f^2 n^2 F'^2 n' g^2 V^2 - (2a^3 n^3 F'^3 n' g^2$$

$$+ 4a^3 n^3 F'^3 f^2) V - a^3 n^4 F'^4 = 0$$

che è più trattabile, essendo sempre in pronto l'equazione (R) per l'ultima esattezza ne' casi di vera occorrenza per la pratica.

§. XXXIII.

Molte importantissime considerazioni ci si porgono da fare nel maneggio di questa equazione. Tutto vi può far figura di cosa indeterminata, e tanti sono i problemi, che possono risolversi, quanti sono i simboli assunti. Basterà qualche esempio per conoscere il buon uso che se ne può fare, senza che infruttuosamente si vadano svolgendo diversi casi, che involgono la sola fatica del calcolo. Ma sarà però utile cosa e necessaria, che si facciano alcune dichiarazioni, le quali aprono la via di fare ogni sorta di esperimento intorno alle formule trovate in tutte le particolari occorrenze della pratica. Nel trattare l'equazione precedente due vie possono prendersi per l'omogeneità; una è quella d'introdurvi de' pesi assoluti, l'altra di procedere per misure lineari. Volendo introdurre per la forza motrice un peso equivalente in libbre sarebbe necessario di sostituire per tutte le quantità di questa forma $f^2 R, g^2 Q$ il peso in libbre, che ha un prisma regolare d'acqua avente f^2, g^2 per base, ed R, Q per altezza. Ma trattando tutto con misure lineari, come di piede e parti di piede, può la lettera F' esprimere l'altezza, da cui cadendo liberamente un grave acquista in fine della caduta la celerità, con cui muove le sue braccia il rematore nel remare: misura, a cui non è difficile il trovare un peso equivalente. In questo modo diventa pure omogeneo con V il valore di F' , e con tutti gli altri. A questo modo io m'atterrò in appresso lasciando la libertà a chi piacesse di far uso dell'altro. Posto ciò, è d'uopo considerare, che tanto è minore la forza dell'uomo, quanto è più grande la velocità con cui dee esercitarla; e che però con una data velocità non potrà egli esercitare, che una data quantità di forza. Se dunque si

chiami A il peso massimo, che può da un uomo essere tenuto sospeso lungamente con le braccia senza grave stento, purchè non gl' imprima alcun moto, e \sqrt{B} la massima velocità di cui sono capaci le braccia d' un uomo, se abbia a muoverle in aria senza alcuna straniera resistenza da vincere, è certo che detta A' la forza delle braccia d' un uomo, $\sqrt{F'}$ la velocità con cui dee muoverle in un caso particolare, se sia $A' = A$, l' uomo non può con le braccia esercitare alcun movimento, essendo tutta la forza di lui impiegata nel reggere il peso; e se sia $B = F'$, non può egli esercitare altra forza A' , essendo tutto il suo sforzo messo nel muovere sè stesso con quella massima velocità. Per verità non possono sì facilmente definirli nè A , nè B per la grande variabilità loro, e non una solamente è la funzione con cui queste alternative possono esprimersi adeguatamente. Pure possiamo in via di esempio afferrare qualche cosa, e prendendo per espres-

sione generale col Sig. *Eulero* la formula $A' = A \left(1 - \frac{\sqrt{F'}}{\sqrt{B}} \right)^2$

può ella soddisfare al bisogno; mentre posto $F' = 0$, diventa $A' = A$, posto $B = F'$ diventa $A' = 0$, e posto F' minore di B , A' ha un valore sempre minore di A , e più o men grande secondo ch' è minore o maggiore la ragione $\sqrt{F'}$ a \sqrt{B} . In questo modo possiamo ridurre a peso la forza dell' uomo, che si fosse espressa per via di velocità, e per converso, come vedremo, stabilito che siasi il valore di A , e di B . Assumiamo, che non è fuor de' limiti, $A = \text{libb. } 50$, $\sqrt{B} = 8$ piedi del Reno in un minuto secondo, essendo il piè del Reno a quel di Parigi come $1000:1034,93$. La

nostra formula diverrà $A' = 50 \left(1 - \frac{\sqrt{F'}}{8} \right)^2$, e bisognerà esprimere $\sqrt{F'}$ in piedi da percorrerli uniformemente in un minuto secondo, il cui numero sia m , e però la formula farà $A' = 50 \left(1 - \frac{m}{8} \right)^2$. Se dunque fosse $m = 4$ piedi, farà la

forza dell'uomo equivalente a libb. $12\frac{1}{2}$; e se fosse necessario il valore di libb. 16 per la forza dell'uomo, non potrà la sua velocità esser maggiore di piedi $3\frac{1}{2}$ per secondo. Avendo pertanto destinato di misurare per questo verso la forza che ho detto F nelle formule precedenti, e diventando F' l'altezza dovuta alla velocità con cui debbono muoversi le braccia del rematore, farà agevole il ridurre la forza motrice a un peso conosciuto.

6. XXXIV.

Per ciò fare, e perchè anche gli altri simboli V , Z , y entrano ne' nostri computi sotto figure di altezze dovute a certe velocità, è bene che si riducano le espressioni a forme trattabili. E' noto che un grave nel cadere liberamente dalla quiete per l'altezza di piedi 15,625 del Reno non impiega che un minuto secondo, e che con la velocità acquistata in fine di questa caduta percorrerebbe nello stesso tempo di moto uniforme piedi 31,25. Ciò presupposto, sia in generale m il numero di piedi del Reno, che percorre di moto uniforme nel tempo t un grave con la velocità dovuta all'altezza F' , farà

$$t = \frac{m}{\sqrt{F'}} = \frac{\sqrt{15,625}}{31,25} \cdot \frac{m}{\sqrt{F'}} = \frac{125m}{31,25\sqrt{1000F'}}$$

$$= \frac{4m}{\sqrt{1000F'}}, \text{ e però, fatto } t=1'', \text{ farà } \sqrt{1000F'}=4m, \text{ e}$$

$$F' = \frac{16m^2}{1000} = \frac{2m^2}{125}, \text{ sì che dato il numero di piedi del Re-}$$

no m percorsi uniformemente in un secondo, si avrà in piedi corrispondenti l'altezza F' , cui tale velocità è dovuta, e per converso; il che è di comodità ne' calcoli indicibile, valendo per tutte le altezze, come sono le assunte V , Z , y . Ciò premesso rivolgiamoci agli esempi.

I. Esempio

I. *Esempio*

Trovare la velocità d' un navilio spinto uniformemente a remi , in cui 24 sono i rematori, ed altrettanti i remi ; la superficie f^2 presa alla massima ampiezza della prora di 6 piedi quadrati ; di $\frac{1}{4}$ di piede quadrato la superficie g^2 della pala , che s' immerge ; di piedi quattro la parte interna a del remo, e di piedi 7 l' esterna b . Sarà $n=n'=12$.

Si sostituiscano questi valori nell' equazione (S) ; e la relazione tra la forza motrice F' , e l' altezza V dovuta alla celerità del punto, su cui posa il remo nel navilio, sarà (Q)... $7^3.9V^4 - 6.9F'V^3 + 18.36F'^2V^2 - 360F'^3V - F'^4 = 0$ Essendo documentati al §. XXXIII, che conviene economizzare la forza dell' uomo , sì che prenda colle braccia una velocità minore di 8 piedi all' m'' , sia la velocità dovuta all' altezza F' di soli piedi 2 per secondo. Si troverà (§. preced.)

essere $F' = \frac{8}{125}$, e corrispondere (§. XXXIII.) al peso di libb.

28. circa . Sostituito questo valore per F' e risolta l' equazione si troverà , che una delle radici di lei è prossimamente

$V = \frac{1}{375}$. Determinato questo valore per V si ripigli

(§. XXIII.) la formula

$$(I) \frac{1}{f^2} (4f^2V \text{sen. } \mu + 2nF' \text{sen. } \phi \cos. \Delta) - Z = 0$$

e sostituendovi i valori sen. μ , sen. ϕ , cos. Δ (§. XXXII.) , si

avrà $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$; e finalmente fatto $F' = \frac{8}{125}$,

$f^2 = 6$, $V = \frac{1}{375}$, $n = 12$, si troverà $Z = \frac{18}{125}$. Dunque do-

vrà essere $\frac{18}{125} = \frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.) , e $m = 3$; e però la ve-

locità del navilio farà di tre piedi per minuto secondo .

II. Esempio.

Pigliamo per secondo esempio il caso del Sig. *Chazelles* riferito nelle Mem. della Real Soc. di Parigi per l' anno 1702: caso preso in considerazione così dal Sig. *Daniele Bernoulli* come dal Sig. *Eulero*. Osservò il Sig. *Chazelles*, che una palata con 26 remi per ogni lato, e cinque rematori per remo non faceva che 72 pertiche per minuto primo a voga forzata, cioè piedi $7\frac{1}{2}$ del Reno circa per minuto secondo.

La parte interna del remo era di 12 piedi, e di 24 l' esterna. Calcola egli, che la superficie d' ogni pala operativa nel cacciar l' acqua fosse di piedi quadrati $2\frac{1}{2}$. Non essendo le-

cito il supporre, che la superficie resistente alla prora fosse di tale o di tal altra dimensione, il che lascerebbe un ragionevole sospetto, che la si adattasse alla teoria, io mi limito a cercarla direttamente, giacchè non ne fa alcun cenno il Sig. *Chazelles*, in questo modo. Dovendo essere Z l' altezza dovuta alla proposta celerità della Galera, farà $Z = \frac{2m^2}{125}$

$$= \frac{2(7\frac{1}{2})^2}{125} \text{ (§. XXXIV.)} = \frac{9}{10}; \text{ e poichè } n = 130, \text{ sostituendo}$$

questi valori nell' equazione $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$, si troverà

$$V = \frac{9f^2 - 1300 F'}{40 f^2}. \text{ E qui prima d' inoltrarci forz' è definire}$$

un valore per F' . De' cinque rematori l' ultimo a capo del remo è più in azione di tutti, e confessa il Sig. *Chazelles*, che *celui qui est le plus près du point d' appui ne fait presque point de force ni de mouvement*. Riflettendo che il primo re-

matore faceva in questa voga forzata sei piedi in $\frac{5}{6}$ di minuto secondo, come appunto calcola il Sig. *Bernoulli*, possiamo assai ragionevolmente attribuire ad ognuno de' cinque rema-

tori tre piedi per secondo di velocità ragguagliata e continua (§. XX.); e però dovendo essere $\frac{2m^2}{125} = F'$, farà

$F' = \frac{18}{125}$, e però $V = \frac{45f^2 - 936}{200f^2}$. Si ripigli ora l'equazione (S), e vi si sostituiscano i valori $n = 130$, $n' = 26$,

$g^2 = 2\frac{1}{2}$, $F' = \frac{18}{125}$, e il valore trovato per V ; e perchè cin-

que sono i rematori, che tengono afferrato il remo disugualmente lontani dal centro spontaneo, si assuma l'intervallo $a = 10$ piedi, e l'intervallo $b = 20$ piedi. Ma senza fare altre sostituzioni nell'equazione (S), che quella di

$V = \frac{45f^2 - 936}{200f^2}$, osservo, che si può trovare il valore di f^2

immediatamente, convertendosi tosto l'equazione (S) nell'equazione (T)

$$\begin{aligned} (T) \dots 128b^3f^2n'g^2 \left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2} \right)^4 \\ - 96ab^2f^2nF'n'g^2 \left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2} \right)^3 \\ + 24a^2bf^2n^2F'^2n'g^2 \left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2} \right)^2 \\ - (2a^3n^3F'^3n'g^2 + 4a^3n^3F'^3f^2) \left(\frac{45f^2 - 936}{200f^2} \right) - a^3n^4F'^4 = 0. \end{aligned}$$

faccia pertanto la superficie $f^2 = 20\frac{4}{5}$ piedi quadrati, i primi quattro termini svaniscono, e rimane l'ultimo termine negativo. E sol che si faccia $f^2 = 20\frac{7}{9}$ piedi quadrati, i quattro primi termini riescono tutti positivi, e presi insieme molto maggiori dell'ultimo termine negativo. In conseguenza una delle radici dell'equazione determinata (T), in cui f^2 è l'incognita, è maggiore di $20\frac{7}{9}$, e minore di $20\frac{4}{5}$. E però la superficie resistente della Galera sperimentata dal Sig.

Chazelles era tra questi limiti costituita. Per questa via si troverebbe, che non assegnando di velocità ragguagliata e continua (§. XX.) ad ogni rematore, che 2 piedi per secondo, cioè ponendo $F' = \frac{8}{125}$, avrebbe dovuto essere la superficie f^2

tra $9\frac{11}{45}$, e $9\frac{10}{45}$ piedi quadrati. Si viene quindi reciprocamente in cognizione, che perchè potesse aver luogo la supposizione di $f^2 = 16$ piedi quadrati fatta dal Sig. *Eulero* (pag. 204. §. XXX.) per la superficie di questa medesima Galera, avrebbe dovuto essere prossimamente $F' = \frac{14}{125}$; e per-

ciò la velocità di ogni rematore quasi di $2\frac{3}{4}$ piedi per secondo; e farebbe stato in conseguenza (§. XXXIII.) di libb. 21 crescenti il peso equivalente allo sforzo esercitato da ognuno di loro; risultamenti che se fossero provenuti dalla teoria, come i nostri, basterebbero a far fede amplissima della bontà di lei; ma è dovuta solamente alla sagacità dell' incomparabile Sig. *Eulero* la discreta supposizione, ch' ei fa della superficie in quistione di 16 piedi quadrati, che dal calcolo non farebbe mai proceduta direttamente.

III. Esempio.

Si dimanda qual forza avrebbe dovuto impiegare ogni rematore nella Galera del Sig. de *Chazelles*, perchè la velocità di lei fosse di 10 piedi per ogni minuto secondo. Nella formula $\frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.) si faccia $m = 10$; farà $Z = \frac{8}{5}$, e pe-

rò nell' espressione $Z = 4V + \frac{nF'}{f^2}$ (I. Esempio) si ponga

$n = 130$, $f^2 = 20$ piedi quadrati, $Z = \frac{8}{5}$; si troverà

$V = \frac{16 - 65F'}{45}$. Quest' espressione è sommamente comoda, siccome quella, che sostituita nell' equazione (§), come abbia-

mo fatto nell' esempio precedente, ci dispensa dalla risoluzione dell' equazione . In fatti messo per V in (S) il valore trovato, abbiamo

$$128b^3f^5n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^4 - 96ab^2f^3nF'n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^3 \\ + 24a^2bf^2n^2F'^2n'g^2\left(\frac{16-65F'}{45}\right)^2 \\ - (2a^3n^3F'^3n'g^2 + 4a^3n^3F'^3f^2)\left(\frac{16-65F'}{45}\right) - a^3n^4F'^4 = 0$$

Se pertanto sia $F' = \frac{16}{65}$, tutto svanisce fuorchè l'ultimo termine negativo; e se sia $F' = \frac{17}{65}$, tutti i termini fuorchè l'ultimo diventano positivi, e di esso maggiori presi insieme. Di modo che una delle radici F' è costituita tra i limiti $\frac{16}{65}$,

$\frac{17}{65}$. In conseguenza, preso il limite minore per la radice,

farà $F' = \frac{16}{65} = \frac{2m^2}{125}$, e prossimamente $m = 4$ piedi. Conver-

rebbe dunque, che con le braccia prendesse ogni rematore quasi quattro piedi per ogni minuto secondo di velocità raggiunta e continua (§. XX.), se prima ne aveva tre percorrendo il navilio nello stesso tempo $7\frac{1}{2}$ piedi del Reno; la

qual velocità è troppo grande. Imperciocchè essendo $F' = \frac{16}{65}$

$= \frac{t}{T}F$ (§. XX.), per quanto celeremente possano i remato-

ri trar dall' acqua, e rimettere in acqua il remo, perchè pochissimo stia in aria, è assai difficile, che sia $t:T = 1:2$; per il che il Sig. *Bernoulli*, e il Sig. *Eulero* assumono costantemente $t:T = 1:3$, ragione pure non esatta, come ho cercato di accertarmene possibilmente nella voga forzata di molti navigli; e però pigliando la ragione $T:t$ un po' più che dupla, e un po' men che tripla, cioè come $5:2$ per esempio, do-

vrebbe essere $F' = \frac{16T}{65t} = \frac{5.16}{2.65} = \frac{2m^2}{125}$ (§. XXXIV.), e $m = 6$

piedi crescenti per secondo, ch' è una velocità ragguagliata troppo forte per le braccia de' rematori, giacchè importa una celerità di ben nove piedi per secondo a carico del primo rematore, che non è soffribile.

§. XXXV.

E' inutile, che più mi diffonda in esempj, potendo ognuno risolvere da sè tutte le quistioni più importanti, che possono farsi intorno alla navigazione a remi col mezzo delle formule nostre, sì per definire il movimento de' navigli nel principio, allorchè partono dalla quiete, come in appresso nel moto uniforme ch'essi prendono, e mantengono successivamente. Così può conoscersi col beneficio di loro qual sia la superficie g^2 da darli al remo, quale il numero di essi n' , quale il numero n de' rematori, e simili elementi, onde obbligare il remigante a moderato sforzo nelle lunghe navigazioni, e fare con un navilio di data costruzione il maggior viaggio, che può essere concesso. E similmente potrebbero intraprendersi diverse soluzioni ricercando il massimo o il minimo negli elementi a piacere; ma non vo' abusare del tempo, contentandomi di avere svolto nel modo che ho potuto migliore la teoria, e di avere somministrato i mezzi di farlo non difficilmente. Un solo oggetto dimanda ancora una ben seria discussione, prima di dar fine, da cui m' asterrei volentieri, se non potesse attribuirmi a colpa il tacere su cosa, che fa tanta parte della Memoria del Sig; *Eulero*, e specialmente delle sue finali conclusioni in questa materia. L' oggetto riguarda la proporzione tra la parte esterna e l' interna del remo, dal punto del navilio, sul qual esso riposa: proporzione, cui quel grande Geometra cerca per ogni verso di bene stabilire, e su cui fonda l' essenziale di questa navigazione. Non ne abbiamo fatto cenno in alcun luogo, per trattarne qui in fine, come la dignità della cosa richiede. Or poi che siamo certi essere il remo *PR* (*fig. III.*) una verga interposta tra due ostacoli da muovere in contrarie parti, uno de' quali è il navilio medesimo su cui posa il remo; e che

nella palata mentre il capo del remo dal punto P si trasferisce in P' , la sponda del navilio V in V' , il centro della pala da R in R' , v' ha un punto immobile, come M fuor del navilio, che ho detto centro spontaneo, intorno al quale si fanno tutti questi movimenti; è manifesto che cangia aspetto la cosa, e il punto V non è più che un sito, ov' è applicato il remo PR ad una delle resistenze del sistema, sì che le lunghezze PV , VR vanno considerate diversamente, che non facevasi per l' innanzi, allorchè pareva che il punto V facesse altra funzione. Fa d' uopo pertanto considerare la quistione sotto due differenti aspetti, ch' ella può avere di speculazione, e di pratica. Altro è in fatti l' assumere una verga immateriale PR pel remo stesa sopra un piano, e la forza motrice P astratta e disgiunta dal rematore; e tutt' altro il caso d' una forza, che dee esercitarsi in un tal modo dalle braccia d' un uomo sopra un remo reale, ch' è un corpo pesante applicato alla sponda di un navilio. Esaminiamo per un poco l' una e l' altra condizione, e vedremo poi a quali conclusioni ci condurrà quest' esame. Nel primo caso sia la verga inflessibile cogli ostacoli in V ed R costituita in un medesimo piano con la direzione pure della forza immateriale posta in P . Dicsi M la resistenza in V , R la resistenza in R , e tuttavia $PV = a$, $VR = b$. Per la natura del centro spontaneo M (§. VII.) si troverà $VM = \frac{bR}{M+R}$, $MR = \frac{bM}{M+R}$, e $P \cdot PM = P(PV + VM) = P \cdot \frac{aM + (a+b)R}{M+R} = 2M \cdot \frac{bR}{M+R}$ per l' equilibrio, cioè pel caso del moto uniforme nella navigazione a remi, e però sarà

$$aPM + aPR + bPR - 2MbR = 0$$

cioè $P = \frac{2bMR}{aM + aR + bR}$. Sia b moltiplice di a , come sarebbe $b = na$, essendo n numero maggiore dell' unità. Sostituendo questo valore per b risulta la formula $P = \frac{2nMR}{M + (n+1)R}$, da cui si rileva, che quanto maggiore del segmento PV sarà il segmento VR , tanto più di forza P si richiederà per

l'equilibrio co' medesimi ostacoli M ed R . Ciò si fa maggiormente chiaro dal ricavarli ancora dalla formula superiore

$$\frac{a}{b} = \frac{R(2M - P)}{P(M + R)}$$

mentre quanto maggior ragione la parte interna a della verga avrà all' esterna b , tanto più sarà $R(2M - P) > P(M + R)$, e però vie minore potrà essere la potenza P della quantità

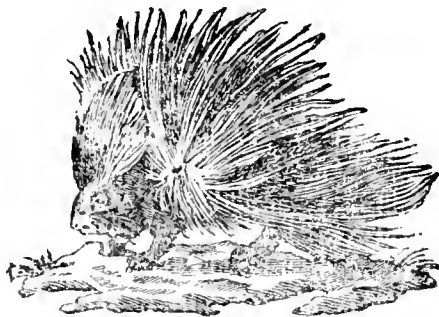
$\frac{2MR}{M + 2R}$. Ciò è interamente contrario non solamente a quanto risulta dalla teoria del Sig. *Eulero*, ma eziandio all' esperienza comune. Ma ecco il vero scioglimento di questo nodo; e per questo ho detto, che bisognava considerare questo articolo e dal canto speculativo, e dal pratico insieme. E' fuor di dubbio, che contemplato il soggetto in via astratta, non può avervi Meccanico, il quale, interposta una verga PR sopra un piano tra due ostacoli da muoversi V, R per opposti versi da una potenza in P , non riconosca subito la realtà del centro spontaneo M , che abbiamo indicato, e non trovi pure reale il vantaggio per la potenza, che l'intervallo PV sia maggiore dell'intervallo VR . E questo inconcusso vantaggio è pure reale nella navigazione, ma non può essere atteso in pratica per le seguenti ragioni. La potenza motrice in pratica è un uomo di altezza determinata PZ (fig. VI.), il quale dee posare sul pavimento del navilio. Il navilio ha necessariamente una sponda costituita a qualche altezza FV dalla superficie dell' acqua, su cui dee appoggiarsi il remo. Che giova, se, essendo per l' altezza dell' uomo determinato il sito dell' applicazione in P , e per la posizione data della sponda V determinata pure dal più al meno la lunghezza esterna del remo VR , insegna la teoria, che vie maggior vantaggio avrebbe la potenza quanto maggiore dell' esterna fosse la lunghezza interna VP , mentre repugna, che possa il rematore collocarsi in P ? Ed ecco come, e perchè, fermo il risultato vero e giusto della teoria, è costretta la pratica a rinunciare al beneficio, che quella le indica, adattandosi alla struttura dell' uomo, alla forma del navilio, e all' altezza della sponda dal pelo dell' acqua; e per quello ancora che cresce coll' allungarsi del remo il peso da maneggiare, l' inerzia

da

da vincere, e la resistenza del soffregamento alla sponda, mentre il remo è fuor d'acqua, come abbiamo accennato (§. XVII). Quindi è che per soddisfare a tutte queste condizioni inseparabili dal meccanismo del remare, s' adotta in pratica or una or altra proporzione, secondo i casi, tra le parti del remo entro e fuori del navilio. Non è dunque lecito il fissare a piacere la ragione $\frac{a}{b}$, o secondo i dettami della teoria, do-

vendo ella adattarsi alle circostanze sopradette. E un altro oggetto finalmente bisogna appagare essenzialissimo, quello cioè di bilanciare il peso delle due parti PV , VR , sì che il centro di gravità del remo cada ne' contorni di V , affinchè nel maneggiarlo fuor d'acqua abbiassi la maggior possibile facilità il rematore, di che abbiamo parlato al §. XVII.

Non mi trattengo di più su questo argomento, avendolo messo, per quanto mi pare, nel suo vero lume, e avendo mostrato che non è da sondarsi molto su la proporzione migliore di quelle parti secondo i principj della teoria per indi dedurre il moto più o meno vantaggioso del navilio, non potendo la pratica adattarvisi per alcun conto, obbligata alle condizioni sopraesprese non foggette all' arbitrio del Geometra.



M E M O R I A

S E C O N D A E D U L T I M A

Sopra la riproduzione della Testa nelle Lumache terrestri ().*

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore
di Storia Naturale nell' Università di Pavia.

I N T R O D U Z I O N E .

NON saprei dire se a giorni nostri siavi stato fenomeno naturale, che per la sua novità, e apparente stranezza fatto abbia tanto romore nel Mondo fisico, dato abbia origine a tante esperienze, e tutt' insieme a risultati sì diversi, sì contrarianti, come il riproducimento del capo nelle lumache terrestri. Dopo la pubblicazion del mio *Prodromo*, e le Traduzioni fatte di esso in lingua francese, tedesca, ed inglese, è incredibile quante migliaia di questi rettili vennero decollate, parte da alcuni che dando in seguito fuori i lor Saggi su le lumache, hanno resi per la prima volta consapevoli i dotti di loro esistenza; parte da Fisici comunali, od anche di qualche celebrità, ma poco meno che inetti per le sperienze; e parte in fine da Fisici illustri, e che nell' arte dello sperimentare godono d' una stabilita riputazione. Una sì grande diversità di uomini sperimentatori come non doveva produrre una considerabile discrepanza nei risultati? Quindi egli è avvenuto di fatti, che alcuni ben lontano dall' ottenere la riproduzione del capo in questi testacei, ne hanno avuta la morte; e ciò ha fornita loro occasione di combat-

(*) La prima Memoria su lo stesso argomento è stampata nel Tomo I. della Società Italiana.

tere , e rigettare la mia scoperta , giudicandola più presto immaginaria , che veritiera . Altri conseguito avendo soltanto un principio di riproduzione , l' hanno accagionata per non verace del tutto , ma esagerata anzi che no . Altri in fine con l' avere ottenuto l' intiero capo rigenerato , l' hanno confermata compiutamente .

Dopo l' avere io nella prima Memoria narrati i principali risultati di mie esperienze relativi al presente soggetto , mi rimane in questa seconda , a compimento del medesimo , di narrare gli altrui , esponendo con amica imparzialità così quelli che favoriscono la mia causa , come gli altri che le sono contrarj . Debbo qui solo avvertire , che tanto in prò , quanto in contro io non farò parola che di quelle esperienze , che a mia notizia per le stampe si trovano già note , o che inedite sono state a me comunicate da Fisici insigni . Imperocchè quantunque su d' un tal punto v' abbiano altre esperienze , e queste non poche , e instituite anche in parte da uomini di non languida fama ; pure io non le reputo degne di storia , per non essere state notate dai loro Autori , i quali soprapresi dalla novità e stranezza del fatto , non hanno avuto altro in mira (bene o male) che di ripeterlo , nulla curandosi poi di affidarne alla carta i risultati , e molto meno di renderli pubblici . A procacciar poscia al presente scritto luce e buon ordine , sia bene il dividerlo in tre Articoli ; il primo de' quali verserà intorno a quegli esperimenti che impugnano la mia scoperta ; il secondo comprenderà quegli altri che la confermano ; e il terzo abbraccerà diverse Riflessioni , che ho creduto adattate a togliere gli equivocamenti , e a porre in maggior lume la verità .

ARTICOLO I.

Si riferiscono le esperienze contrarie .

Si può dire che l' *Avant-coureur* , Foglio ebdomadario che si stampa in Parigi , sia stato per un tempo il campo di battaglia , dove hanno combattuto più Autori così a favore che contra il rinnovamento del capo nelle decollate lumache . La prima opposizione che qui si trova è del Sig. Wartel ,

Siss ij

sotto li 4 Luglio del 1768, esposta ne' seguenti termini.

„ Il Sig. *Wartel*, Canonico Regolare dell' Abbazia di S.
 „ Eloi, e della *Società* Letteraria di Arras, ha osservato che
 „ le lumache vivono lunghissimo tempo senza alcune di quel-
 „ le parti, che sembrano essenziali alla vita. Sul finire di
 „ Ottobre del 1767 ei recise il capo a molte lumache, che
 „ si rinchiusero subito ne' loro gusci, e che ne otturarono la
 „ bocca, come se state fossero intiere, e con sorpresa le vide
 „ nel mese di Maggio del 1768 uscire dalle loro case, pie-
 „ ne di vita, ma senza testa. Il Sig. *Wartel* non crede pos-
 „ sibile nelle lumache la riproduzione della testa, conciossia-
 „ chè dopo le sue esperienze nessuna l' ha rifatta; anzi
 „ non hanno rifatti tampoco i corni alcune di esse, alle
 „ quali gli aveva recisi „.

Analogo a questo fatto si è l' altro del Padre *Cotte*, Pre-
 te dell' Oratorio, riferito dallo stesso Giornale li 29 Mag-
 gio del 1769, che per essere diffusamente esposto riporterò
 compendiatamente.

Udita che ebbe a Parigi quel Religioso la mia Osserva-
 zione, preso il destro di un' abbondante pioggia caduta in
 Giugno, fece con affilata forbice saltare in aria tante teste,
 quante lumache per la sopravvenuta pioggia erano uscite del
 guscio. Furono in seguito riposte in luogo, dove sovente egli
 potea visitarle. Spirati otto giorni, di 12 lumache ch' egli
 avea decapitate, quattro eran morte. Le altre perirono dopo,
 fuori di una sola, che dopo un anno viveva ancora, ma
 senza la più picciola apparenza di riproduzione.

Gli 11. dello stesso mese il Padre *Cotte* decapitò altre 12
 lumache, e si accorse che due o tre, a cui credeva di aver
 fatta a dovere l' operazione, mostravano ancora intiere le cor-
 na, le quali soltanto spogliate apparivano della pelle, che le
 ricopre. Dal che conclude quel Religioso, che la lumaca ha
 qualche volta il tempo, nel momento che sente l' azion del-
 la forbice, di ritirare la testa in guisa, che non ne resta ta-
 gliato che l' invoglio, o la pelle che la ricopre. Ora egli è
 certo, soggiugne questo Naturalista, che le lumache possono
 riprodur questa pelle, e far credere di avere acquistata una
 nuova testa a un osservatore, che non sia a lume della loro
 astuzia. Ma per conto di quelle lumache, che non sono sì

pronte nel ritirare la testa, egli è più che persuaso che, recisa loro che si abbia una volta, non la recuperano più mai.

Queste sperienze furono ripetute dal Padre *Cotte* fu di un numero prodigioso di lumache ne' seguenti anni 1770. 1771. 1772. 1773, e i risultati tornarono presso a poco gli stessi come apparisce dal Giornale di Fisica dell' Abbate *Rozier*, dove sta registrata questa lunga serie di novelle esperienze. Le lumache adunque per lui decapitate in progresso di tempo periron tutte, senza che alcuna riproducesse la testa; che anzi se invece di mutilarle così, la forbice non veniva a levare che la pelle del capo, neppur questa rigeneravasi. Di più se invece del capo venivan loro levate le corna, neppur queste, come osservò egli, si rifacevano.

Nell' anno stesso 1769 che nel *Avant-coureur* fece imprimere le sue prime esperienze intorno alle lumache il Padre *Cotte*, nel Giornale di *Berna* li 4 febbrajo pubblicò le sue sul medesimo soggetto il Signore *Valmont* di Bomare, come costa dalle seguenti parole.

„ Si ricorderà che il Dottore *Spallanzani* Naturalista di
 „ Modena nel mese di Giugno dell' anno 1768 annunziò la
 „ scoperta della riproduzione della testa nelle lumache. Il
 „ Sig. *Valmont* di Bomare, Ostensore di Storia Naturale, di
 „ cui ha dato fuori un Dizionario, ha ripetuto le sue esperienze intorno a questa materia l' autunno del 1768 a
 „ *Chantilly* in compagnia del Signor *Borie*, Speciale del Principe di *Condé*. Hanno osservato che le lumache, a cui bruscamente tagliato avevano la testa, sono morte, esalando
 „ un odore fetidissimo. Di 52, che avevano decapitato, non
 „ ve ne sono state che 9, che essi veduto abbiano strisciare
 „ in capo a 24 ore, ed erano unicamente quelle, che erano
 „ state mutilate, appoggiando debilmente tra le corna e le
 „ parti della generazione il taglio di un coltello, male affilato. Veggonsi allora sensibilmente rientrar le corna nell'
 „ interno dell' animale, a cui non è stata tagliata che la
 „ pelle, e la mascella superiore. Quindi ricomparendo l'animale, fa vedere le corna mutilate „.

Presso a poco le stesse cose ridice questo Francese nel suo Dizionario di Storia Naturale all' Articolo *Limacón*, aggiungendo di aver ripetuto nel 1769 i medesimi tentativi su

molte altre lumache, ma col medesimo infelice successo.

Da questi tre Naturalisti, che in virtù delle loro esperienze negata hanno del tutto la riproduzione del capo nelle lumache, non denno andar disgiunti due altri, cioè a dire li Sigg. *Argenville*, e *Schröter*. Sebbene per conto del primo, non avendo io potuto vedere il suo libro, malgrado le diligenze da me usate per rinvenirlo, dovrò contentarmi di riferire quel poco che nelle seguenti parole ne accenna il Sig. *Murray* in una sua Memoria relativa al presente soggetto, della quale dovrò parlare più sotto. *Maxime vero ab affirmantium parte recedit Argenville, ex centenis (cochleis) 25 modo in diem posterum vixisse referens*. Per ciò poi che riguarda il Naturalista Tedesco, nel suo *Saggio d' un Trattato Sistemático sopra le Conchiglie terrestri* (a) impiega egli quasi un' intiera Sezione nel raccontare i numerosi suoi cimenti su le lumache. E siccome tante morirono, quante furono quelle che decollò (e queste giunsero a più centinaia), quindi si crede autorizzato abbastanza per negare in tai rettili la rinnovazion della testa. Che anzi non avendo essi tampoco rifatte le corna recise, nè la coda, nega egli del pari la possibilità della rigenerazione di queste parti.

Rimane ora a parlare di quegli Autori, i quali quantunque con le loro esperienze non combattano in tutto le mie, in quanto che non negano essi qualunque riproduzione del capo, vogliono però che tal riproduzione non sia mai dell' intiero capo, ma d'una parte soltanto, o appartenenza di esso. Tre a mia notizia sono questi, cioè il testè citato *Murray*, *Adanson*, e *Presciani*. E per rifarmi sul primo, egli nell' accennata sua Memoria (b) dopo l' avere esposto con lungo apparato di erudizione gli esperimenti di quelli, che confermatà hanno la mia scoperta, e di quegli altri che l' hanno impugnata, discende in fine a darci conto de' suoi tentativi, che in tutto riduconsi a due. Aggirasi il primo su quella specie di lumaca detta *belix pomatia* da' Sistematici. Due pertanto di queste vennero da lui mutilate in guisa, che la testa fu

(a) Verf. e. System. Abhandl. über d. Erdconchylien. Berl. 1771.

(b) Joan. Andr. Murray &c. de Redintegratione Partium Cochleis, Limacibusque præcisarum differens &c. Göttingæ 1776.

spiccata dal collo dietro alla base delle corna posteriori. Una di queste dopo una settimana morì. Non così avvenne all'altra, la quale anzi riprodusse: la riproduzione però consistè in poco, cioè a dire in un corno anteriore, e questo anche fatto a stento, e quasi che dissi a dispetto della natura, sì perchè trovossi più breve, e più grosso del consueto, sì perchè la sua sommità non andava fornita di quel punto nero, tenuto comunemente per l'occhio della lumaca. Tale in iscorcio è il primo tentativo, cui tien dietro il secondo, che è questo. Prese avendo il Sig. *Murray* dieci lumache d'altra specie (*helix nemoralis*), alcune di queste furono condannate a perder la testa congiuntamente alle quattro corna; altre la porzione anteriore della testa insieme a due corna; altre la metà della testa unitamente alle quattro corna. Taluna poi non fu privata che delle quattro corna, e tale altra che di due sole. L'esito che ne ebbe quel Naturalista fu il seguente. Dopo sei settimane o in quel torno una delle mutilate nelle sole corna ne mostrò due di riprodotte, senza però che uno di cotali corna novelle corredato fosse del suo occhio. Le altre lumache poi, cui era stata tolta tutta la testa, o una porzione soltanto, si occultarono ne' loro gusci, e vi si profundaron per modo, che ad onta di qualunque stimolo non fu mai che volessero uscirne. Il perchè annojato egli di aspettare più oltre, ruppe il guscio ad una, alla quale tagliato avea l'intera testa, e si accorse che nella parte d'avanti erano già spuntati due lunghi corpicciuoli simili ai rudimenti delle corna, ma insensibili. Ma fu conteso all'Autore per una sopraggiunta accidentalità il seguire più oltre le sue osservazioni. Quindi dal vedere che questi testacei non restaurano la testa perduta, ma soltanto qualche sua appartenenza, come sono le corna, e queste anche imperfettamente, non può egli convenire con me pienamente senza però discordare affatto; e quindi si dichiara di voler tenere una strada di mezzo tra coloro che affermano il riproduzione del capo nelle lumache, e quei che lo negano.

Ai risultati delle sperienze del Professor di Gottinga sono alquanto analoghi quelli d'un certo Dottore *Presciani* di Arezzo in Toscana, compresi in una Lettera inserita nel Tomo XXXII. del Giornale di Pisa pubblicato nell'anno 1778.

Dopo adunque di aver egli esposto nella Lettera il dettaglio di sue esperienze , sul finire di essa ne raccoglie i corollari espressi nei seguenti termini. “ Quello adunque che credo d’aver potuto risolvere, è che le mie lumache, alle quali ho levato la testa con porzion del cervello, sono tutte morte prima o dopo, secondo che loro è stata levata maggiore o minor porzione di cervello ; che le altre alle quali ho levato le antenne, i labbri, i denti, il palato, e la lingua senza toccare il cervello, sono vivute per tutto quel tempo che han potuto soffrire il digiuno, e che le altre poi, alle quali ho tolto le sole antenne, con gl’ integumenti del capo, ed i labbri, hanno tutte perfettamente riprodotto „ . Parliamo per ultimo del Sig. *Adanson*. Veramente non può dirsi che questi pubblicato abbia scritto alcuno particolare intorno a questo soggetto. Solamente da una sua Lettera sotto il giorno 30 di Luglio 1769 scritta al Sig. Carlo *Bonnet*, e da quest’ ultimo stampata nelle sue Opere (*a*), si raccoglie ch’ egli pure è stato nel numero degli Sperimentatori, e che anzi ha sacrificato al coltello anatomico più lumache, che qualunque altro Fisico, essendo giunto a decapitarne in un anno più di 1400. Comincia l’ Accademico di Parigi la Lettera col farci sapere d’essere egli stato il primo a dubitare filosoficamente delle mie sperienze relative alla rigenerazione della testa, ed anche delle corna, e delle mascelle delle lumache. Poi scende a provare che il suo dubbio era fondato, giacchè in mezzo a tanta carnificina non ha ottenuto que’ riproducimenti che si promettono dalle mie esperienze. Vero è ch’ egli ha conseguito delle riproduzioni, ed anche subite, di corna, di teste, di labbri, ecc; ma queste erano riproduzioni di parti non interamente recise; conciossiachè tutte le teste, tutte le corna, tutte le mascelle ecc., che vennero da lui tagliate per intiero, non gli fecero mai vedere la più picciola riproduzione. Quindi dopo l’ avermi ammonito d’ essere più cauto nell’ indagare la verità, si fa a dire ch’ io da uomo inesperto mi sono ingannato; in quanto che ho creduto di

(*a*) Collection complete des Oeuvres de Charles *Bonnet* ecc. T. V. Part. I.

di tagliar la testa alle lumache, e non ho loro tagliato che il *berrettino* o la *calotta*, siccome si esprime il Sig. *Adanson*. Anzi le voci di *berrettino*, e *calotta*, soggiugne egli che sono l'usitata sua espressione, allorchè favella delle mie riproduzioni. Io ho dunque creduto, per lui avviso, di recidere o estirpare le corna o le mascelle, e vi restava sempre la radice, la quale non è punto a stupire se gittato abbia qualche rampollo. Termina poi l'Accademico Francese questa sua Lettera col fare un elogio a se stesso, encomiando la sua bravura nel far notomie de' minuti animali.

E questi sono i tentativi degl' Impugnatori della mia scoperta. Entriamo ora a parlare dei Difensori della medesima; il che formerà il soggetto del seguente Articolo.

ARTICOLO II.

Si riferiscono le Sperienze favorevoli.

Malgrado la molteplicità delle surriferite esperienze io non mi trovava per nulla pentito di aver pubblicata nel *Prodro-mo* quella mia singolare osservazione su le lumache; e ciò perchè io era troppo sicuro di aver veduto quanto quivi racconto, senza timore che qualche ingannatrice apparenza mi avesse imposto. Fin nella primavera del 1766 io mi avvidi del rinnovamento del capo, e delle corna in questa fatta di rettili; ciò non pertanto io differj fino al 1768 a far palese al mondo dotto questo straordinario fenomeno; perchè appunto io non mi contentai per una sola volta di averlo ammirato; ma voleva vederlo di nuovo, e tornarlo a vedere, facendo nel tempo stesso i più minuti e i più diligenti anatomici esami, tanto nelle parti ch'io recideva, quanto in quelle che rigeneravansi, per accertarmi se dir potevasi a tutto rigore, che ciò che riprodotto appariva, era veramente il *capo* della lumaca. Attesa la corrispondenza letteraria, in cui fin d'allora io aveva l'onore di trovarmi, coll' illustre mio Amico Sig. *Bonnet*, io gli andava a mano a mano comunicando la serie tutta quanta de' fatti, che risguardavano i principj, i progressi, e il fine di queste riproduzioni, delle quali egli mostrossi persuasissimo, come apparisce da molte sue

lettere fu tal proposito a me scritte, e che si trovano impresse fra le sue Opere (a). Ed in cotal persuasione sono pur rimasti tutti que' faggi Conoscitori, a' quali ho dato a vedere questi animali riproducenti, così in Modena, quando in quell' Università io era Professore, come qui in Pavia: e posso dire che anche l'anno 1782 trovandomi aver più lumache fu gli ultimi di Giugno, che cominciavano affai bene a rifar le teste, che loro erano state mozzate in Maggio, ebbi la compiacenza di mostrarle a due miei rispettabili Collegli, giudici ottimi di queste materie, il Sig. *Tiffot*, e il Padre *Barletti*, i quali dopo di averle diligentemente, e per ogni parte esaminate, convennero meco senza punto esitare, che le parti che si vedevano rifabbricate, non erano già l'invoglio delle antiche teste, ossia il loro *berrettino* o *calotta*, siccome scherzevolmente ama chiamarle il Sig. *Adanson*, ma vere, verissime, arciverissime teste novelle. Anzi favorito avendomi il prelodato Sig. *Tiffot* di recar seco a Ginevra ne' primi di Luglio dell'anno stesso alcune di queste riproducenti lumache, per farle avere a mio nome al Sig. *Bonnet*, questi con sua lettera del 10 del susseguente Agosto così mi rispose. " Tutte le lumache, che consegnato avete per me al
„ Sig. *Tiffot*, mi sono giunte in ottimo stato, ed ho veduto in esse le ammirabili riproduzioni affai più inoltrate che
„ in quelle, su cui ho fatto io le mie esperienze. Le vostre
„ sono d'una specie ch' io non conosceva: sembra avvicinarsi
„ alcun poco alla grossa specie del nostro paese; ma ne differisce nei colori, e per l' inferiorità della statura. Apparentemente la riproduzione si fa meglio o più facilmente
„ nella vostra specie che nelle nostre, o in quelle della Francia. Io ne giudico dai risultati nati dai differenti tentativi
„ vi intrapresi di qua da' monti, e da' miei in particolare. E dopo l' avermi ragionato d' altre cose, sul terminar della lettera soggiunge. " Rodendo la porta di carta della loro
„ prigione le vostre lumache mi hanno dato le migliori prove che finito avevan del tutto di rifare la testa. Sarebbe
„ cosa ben che rodessero la punta del naso dell' incredulo

(a) L. c.

„ *Adanson*, a fine di persuaderlo di ciò che si ostina di non
 „ voler credere „.

In virtù adunque, e per opera de' miei esperimenti io era
 conscio a me stesso di non essermi ingannato, che che mi op-
 poneffer gli Autori nell' antecedente Articolo per me citati.
 Aggiugnevasi che i loro tentativi erano negativi, e i miei
 per contrario erano positivi; e la Logica c' insegna che un
 fatto positivo non rimane distrutto da mille negativi, per es-
 sere innumerabili (e moltissime non prevedute) le circostan-
 ze che turbar ponno il riuscimento d'un fatto. Ad onta pe-
 rò di tutte queste ragioni, se a mio favore combattuto non
 avessero che le mie sole esperienze, io non poteva esserne
 appieno contento. Di questa verità fisica da me scoperta, *oltre al Sig. Bonnet*, erano restati interamente convinti que'
 pochi miei dotti Amici, che co' propri occhi l'avevan ve-
 duta, e ammirata; ma io aveva fondamento di dubitare che
 stato non fosse lo stesso del Pubblico illuminato; e ogni Au-
 tore che dà in luce qualche suo ritrovamento deve essere trop-
 po premuroso di persuadere anche questo. Vo' adunque dire
 che que' lettori che dopo l'aver lette le mie sperienze, pas-
 savano a legger quelle de' miei Oppositori, si trovavano posti
 tra due autorità contrarie; e malgrado la qualche confidenza,
 che aver potessero su quanto in esse affermativamente io as-
 seriva, questa però non bastava peravventura a dissipare dal
 loro animo ogni ombra di contrario sospetto, o dubbiozza,
 naturalmente creata in loro dall' inaudita stranezza del fat-
 to, e confermata poi, e fors' anche accresciutasi da tanti al-
 tri fatti che tendevano ad impugnarlo. A far sì che ne rima-
 nessero onninamente convinti non vi era miglior mezzo, che
 questa contrastata riproduzione venisse richiamata a rigoroso
 esame da valenti Fisici, e da essi accertata in modo, che
 più non restasse luogo ai contrasti. E tanto appunto è avve-
 nuto. Ed oltre a quell' interna compiacenza che sente qua-
 lunque fisico Ricercatore nel trovar confermate le proprie es-
 perienze, provo anche l' altra di vedere che i più di questi
 Naturalisti si sono compiaciuti di prender le mie parti, sen-
 za che tra me e loro vi avesse il più picciol rapporto, la
 più picciola letteraria corrispondenza. Stimò adunque troppo
 importante alla mia causa, che è pur quella della verità, il

recare in mezzo que' fatti , che la favoreggiano . E siccome veduto abbiamo che alcuni de' fatti opponenti alle mie esperienze si leggono nel Giornal di Parigi, intitolato l'*Avant-coureur* , così quivi si trovano pur altri favorevoli ad esse, il primo de' quali si è questo.

„ Il Sig. *Roos* Tedesco, che attualmente dimora a Parigi ,
 „ ha intrapreso di avverare le sperienze del Sig. *Spallanzani*
 „ sopra una certa quantità di lumache, a cui egli ha tagliata
 „ la testa. Alcune sono morte, altre hanno sopravvissuto all'
 „ operazione, e tra quest' ultime , quando le ha fatte vede-
 „ re son già alcuni giorni a molti Fisici, e Naturalisti, ve
 „ n' erano due che sembravano annunziare la riproduzione
 „ della loro testa. Ad una si vedevano già le due corna su-
 „ periori interamente riprodotte ; e la seconda aveva acqui-
 „ stata una nuova testa, in cui appariva la bocca, e le quat-
 „ tro corna o antenne ; ma secondo l' osservazione del Sig.
 „ *Roos* , questa lumaca non aveva ancor mangiato dopo la
 „ riproduzione „ (N.º 30 di detto Giornale , 25 Luglio ,
 1768).

Al Numero poi 47 dello stesso anno si leggono queste pa-
 „ role . “ Il Sig. *Roos* ha continuato su le lumache le sue
 „ esperienze, di cui abbiamo fatta menzione nel nostro Fo-
 „ glio dei 25 Luglio scaduto . Egli ha di nuovo osservato
 „ che una di quelle lumache, alla quale aveva tagliata la te-
 „ sta alla radice delle corna, acquistato aveva una nuova te-
 „ sta, e le quattro corna sono già comparse „.

Questi risultati consuevano con quelli del Sig. *Lavoisier*,
 riferiti essi pure dal citato Giornale , Num. 38. 19 Settem-
 bre 1768. “ Nel nostro Foglio dei 30 Maggio di quest' an-
 no pubblicata abbiamo la singolare scoperta dell' Ab. *Spallan-*
 „ *zani* Professore in Modena, la quale scoperta concerne la
 „ riproduzione del capo nelle lumache. Narrato abbiamo un
 „ tal fenomeno con tutta quella circospezione che merita una
 „ novità tanto sorprendente. Presentemente ne possiamo par-
 „ lare con più confidenza. Il Sig. *Lavoisier* ha fatto vedere
 „ all' Accademia Reale delle Scienze , della quale egli è
 „ membro , una lumaca , a cui aveva tagliata la testa egli
 „ stesso, e che ha custodita , ed osservata diligentissimamen-
 „ te, la qual lumaca ha riprodotto una nuova testa , somi-

„ gliantissima alla prima, a riserva di non avere ancora acquistato il colore del rimanente del corpo, come trovavasi nella prima testa „.

Non ha lasciato questo Accademico di proseguire le sue sperienze, come si raccoglie da' seguenti termini dello stesso Giornale, Num. 44, 1768. “ Quanto abbiain detto intorno alla riproduzione, che s'assi nelle lumache, quando si è loro tagliata la testa, sembra essersi procacciata l'attenzione del pubblico, e dei dotti. Ci affrettiamo di comunicar loro intorno alle sperienze fatte dal Sig. *Lavoisier* delle descrizioni più precise, più circostanziate, e più esatte, tali in una parola, quali le ha esposte egli stesso all' Accademia Reale delle Scienze.

„ Le lumache, intorno a cui si è esercitato il dotto Accademico, hanno avuta la testa tagliata un poco al di là delle quattro corna. Subito che è stato fatto il taglio della testa, o almeno d' una porzione di testa, la lumaca ritirati precipitosamente nel guscio. Se esce per cangiar di luogo, come accade ad alcune, non si dispiega che in parte. L'estremità, ove è stato fatto il taglio, resta increspata, e a *culo di gallina*. Con quest' arte viene l' animale ad impedire lo spargimento degli umori. Alcuni giorni dopo formati una pelle fina e trasparente nel sito del taglio, ma non veggonsi comparire che dopo un mese circa i primi effetti della riproduzione.

„ Questa manifestasi a foggia di picciola papilla o tubercolo, che si fa vedere al lato destro del taglio: poco dopo ne comparisce un secondo al lato sinistro; e queste papille o tubercoli non sono che i primi elementi delle nuove corna. Nel tempo stesso l' estremità dell' esofago si allunga, ed esce a poco a poco dal piano del taglio, prendendo la figura di una testa che cresce insensibilmente. Il tutto si opera mediante uno sviluppo lentissimo, ma fuor di ciò assai somigliante a quello che si osserva, quando la lumaca esce del guscio. Passano in circa tre e più mesi prima che la nuova testa acquistata abbia a un di presso il volume della prima; da cui però molto differisce in ciò che in vece d' esser coperta di una pelle fatta a sagrino, come il restante del corpo, ella non ha che una pelle fina e traspa-

„ rente , la quale lascia pur vedere una parte dell' interna
 „ organizzazione . Le corna sono pure molto più corte , e
 „ più grosse che nello stato naturale ; non hanno che una li-
 „ nea e mezzo di lunghezza ; hanno però quella sensibilità
 „ che sogliono avere nell' animale , e ad ogni leggier tocco
 „ si ritirano „.

„ Ecco lo stato attuale di una delle lumache del Sig. *La-*
 „ *voisier* , la quale ha fatto maggior progresso . E' stata mu-
 „ tilata li 26 del passato Giugno . Egli ne conserva altre muti-
 „ late nello stesso tempo , che non sono sì inoltrate nella ri-
 „ produzione , circa le quali egli ha osservato che la testa
 „ non è la sola parte suscettibile di riproduzione nella luma-
 „ ca . Quella parte , che comunemente chiamasi *coda* , si ripro-
 „ duce altresì , e a un di presso con le medesime circostan-
 „ ze „.

Ma infra gli Accademici di Parigi il Sig. *Lavoisier* non è stato il solo , che veduto abbia cotal riproduzione : ve n' ha tre altri , come si fa palese dal Tomo degli Atti di questa Reale Accademia dell' anno 1768 . Lo squarcio relativo a un tal fenomeno è troppo interessante per meritare d' esser riferito qui per intero .

„ Il Sig. di *Reaumur* aveva forpreso tutto il mondo fisico
 „ per la portentosa riproduzione dei polipi , e di alcuni al-
 „ tri animali . Ma ecco un nuovo fatto della medesima spe-
 „ cie e forse più singolare , di cui il Sig. de la *Condamine*
 „ ha fatto parte all' Accademia . Il Sig. *Spallanzani* divisato
 „ avendo di tagliar le corna , ed anche la testa ad alcune lu-
 „ mache , si avvide con sorpresa che alcuni di questi anima-
 „ li , che credeva morti , non lo erano , e che dopo un tem-
 „ po assai lungo alcuni avevano rifatte le corna , e alcuni
 „ altri l' intiera testa .

„ Questo fatto eccitò la curiosità di molti Accademici , e
 „ costò la testa a un gran numero di lumache . Ecco quan-
 „ to noi abbiamo potuto raccogliere dalle osservazioni fatte ,
 „ e comunicate all' Accademia da' Sigg. Cavaliere *Turgot* , *Te-*
 „ *non* , *Herissant* , e da altri Fisici . A qualche lumaca è sta-
 „ ta recisa interamente la testa . Alcune altre hanno avuta la
 „ testa spaccata longitudinalmente , e ne è stata levata una
 „ metà . Ad altre in fine non si è fatto che recidere , od an-

„ che strappar le corna . Si è formata nel taglio una pelle
 „ nuova , facilissima a distinguerli dalla vecchia , la quale è
 „ assai più oscura nel colore : la pelle nuova non acquista se
 „ non se dopo l' intiera riproduzione della parte quell' aria
 „ di sagrino , che sembra avere la pelle della lumaca . Quel-
 „ le lumache , a cui la testa è stata interamente tagliata , si ri-
 „ tirano dentro a' loro gusci , e vi restano chiuse per un da-
 „ to tempo , cioè a dire trenta o quaranta giorni

„ Dopo un mese circa si vede formarsi nel mezzo della parte
 „ recisa una specie di protuberanza , che cresce a poco a po-
 „ co , e diventa in fine una testa novella fornita della sua
 „ bocca , e de' suoi denti . Il Sig. *Herissant* ha dimostrato che
 „ questi denti erano una nuova riproduzione , avendo fatto
 „ vedere la testa tagliata d' una lumaca che conservato ave-
 „ va nello spirito di vino , alla qual testa erano attaccati i
 „ denti , quantunque la nuova testa della medesima lumaca
 „ fosse già provveduta de' suoi denti .

„ Le corna non si rigenerano se non se quando le teste sono
 „ interamente formate . Queste corna non osservano alcuna
 „ regola nella loro riproduzione : e lo stesso è di quelle che
 „ sono state recise o strappate . Generalmente sono dapprinci-
 „ pio d' un colore più chiaro che il rimanente del corpo , e
 „ si forma alla loro estremità quel punto nero che credesi es-
 „ ser l' occhio dell' animale . Tali sono le singolari osserva-
 „ zioni , che ci presenta l' amputazione della testa delle lu-
 „ mache . Questo si è un nuovo miracolo di Storia naturale ,
 „ e un' ampia materia offerta alle ricerche de' Fisici . .

E queste sono quelle esperienze , a mia notizia , stampate in
 Parigi , che da diversi Naturalisti Francesi (se si eccettua il
 Sig. *Roos*) sono state instituite per verificare le mie . Segue
 ora a ragionare di quelle , che altri Naturalisti d' altre par-
 ti d' Europa hanno intraprese sul medesimo soggetto ; intor-
 no alle quali volendo io serbare quell' ordine cronologico che
 ho procurato di tenere quanto ho potuto in questa Memo-
 ria nel raccontare i fatti tanto a me favorevoli , che contra-
 rj , primamente è da dire d' uno scritto del Sig. *Müller* di
 Coppenague , impresso nell' anno 1769 , e da lui ristampato
 nel Volume secondo della sua Opera intitolata : *Vermium ter-
 restrium , et fluviatilium succincta Historia* . Siccome poi que-

sto scritto non è tanto breve, così non ne darò io qui che un compendio col toccare i risultati soltanto di sue esperienze dopo l'aver riferiti alcuni avvertimenti, e cautele, ch'egli ad esse premette, e che stimo pur necessario che non ignorino i lettori.

1. L'operazione in ciascun saggio fu sempre fatta da questo Naturalista Tedesco col mezzo di due affilate forbici, allorchè la lumaca aveva allungate, e stese quanto più poteva le corna, e la testa: e prese guardia quanto gli fu possibile di non recidere la parte sottostante alla testa, chiamata volgarmente il piede della lumaca.

2. Immediatamente appresso l'amputazione esaminò egli costantemente con l'occhio non solo nudo, ma anche vestito di lente la testa levata, e vi vide, e vi fece vedere a dei Conoscitori non solamente le quattro corna, ma gli occhi in cima alle maggiori, la bocca, i labbri, le mascelle.

3. Quantunque possa accadere che in vece di levare la testa, non si levi che la pelle, e una porzione di corna, attesa la celerità della lumaca nel ritirare queste parti, tuttavia non v'è pericolo d'ingannarsi. L'esatto Osservatore esaminando la parte tagliata che rimane sul piano delle forbici, giudica sul momento se l'operazione è stata ben fatta, o no: e il meno attento se ne può convincere tosto che la lumaca mutilata esce del guscio, poichè restando a lei attaccata la più picciola parte delle corna, non lascerà di farla vedere tutte le volte che vien fuori del nicchio.

4. Le parti riprodotte si distinguono chiaramente mediante la loro bianchezza, e trasparenza da quelle che appartenevano alla lumaca, mantenendo quest'ultime, benchè staccate dall'animale, la loro opacità, e oscuro colore.

5. Molte circostanze, evitabili e inevitabili, possono impedire la riproduzione delle parti tagliate: una sola osservazione fatta con tutta la precisione, ed esattezza basta a provare tal riproduzione senza replica.

Questi sono quegli avvisi preliminari, che a fine di andar contro a qualunque sospetto o diffidenza intorno al modo da lui tenuto nell'operare si mettono innanzi dal Sig. Müller alle sue Osservazioni, la somma delle quali è la seguente.

La

La lumaca *pomatia* fu da lui trovata inetta per la riproduzione, e lo stesso avvenne alla *nemoralis*.

Non così fu d' un' altra lumaca che non era che una varietà di quest' ultima. Li 19 Luglio 1768 fu a questa in un sol colpo troncata tutta quanta la testa con porzione del collo, e la parte anteriore del piede. La riproduzione fu lenta ad averfi, ma si ottenne assai bene. Li 16 Settembre si vedeva già rifatta la parte anteriore del piede; ma non era così del capo, il quale soltanto nella primavera del 1769 cominciò ad apparire, e nel decorso della buona stagione si sviluppò pienamente, a riserva però d'esser mancante della bocca, delle labbra, e delle corna minori.

Per l' opposto in altra lumaca decollata li 17 Settembre del 1768 il labbro superiore li 29 Marzo del seguente anno era già formato, e l' apertura della bocca si rendeva visibile.

Una terza lumaca decapitata altresì li 14 Settembre dello stesso anno, nella state del venturo avea già rifatta in massima parte la testa.

Termina la sua Memoria il Sig. Müller col dire che un viaggio intrapreso non gli permise l' esaminare più oltre queste teste riproductibili, ma che le sue osservazioni gli sembravano però bastantissime a mostrare indubitata la restituzione delle parti perdute nelle lumache.

Nello stesso anno 1769 il Padre Scarella di Brescia, Chericco Regolare, volle ripetere le mie esperienze, i risultati delle quali favorì di comunicarmi con la seguente sua lettera de' 28 Settembre del medesimo anno.

„ Dopo quattro mesi di silenzio finalmente vengo a rag-
 „ guagliarla di quanto ho potuto osservare ne' miei tentati-
 „ vi su le lumache, e in quelli di un mio Amico, versatifi-
 „ simo nelle sezioni anatomiche, Medico di professione, il
 „ Sig. Lodovico Pufini, che spero darà col tempo alla luce
 „ le sue scoperte nell' Anatomia, e nella Fisiologia. Il dì
 „ adunque 27 di Aprile alla presenza di molti Professori di
 „ Medicina e di Filica tagliai la testa a settanta due lum-
 „ che raccolte negli orti, non poco al di là delle cor-
 „ na maggiori, con forbici nuove, e assai taglienti, le qua-
 „ li con un colpo solo e prestamente recidevano dette teste,

„ nè davano tempo alle lumache di ritirarle al di dentro , e
„ tutto ciò a fine di preoccupare alcune obbiezioni che ho
„ letto ne' Giornali di Parigi. Fino a quest' ultimo mese le
„ ho lasciate quiete in una cassetta esposta all' aria di una
„ finestra di camera chiusa per non disturbarle , e solamen-
„ te di quando in quando andava levando , e gettando via
„ quelle che al cattivo odore davano segni di morte . Sola-
„ mente dopo i dieci di Settembre fino a questi ultimi gior-
„ ni, insieme col detto Signore , e con altri ho esaminato
„ quelle che mi erano restate, e ne ho trovate ventidue an-
„ cor vive , le quali punte al di dietro mettevano fuori la
„ testa riprodotta, o la parte pur riprodotta , che alla mag-
„ gior tenerezza , e al color più bianchiccio del resto del
„ corpo , chiaramente si conosceva di novella riproduzione
„ anche da quelli che erano stati presenti al taglio delle me-
„ desime. Una di queste al solito stimolata, che chiamerò la
„ prima, gettò fuori la sua testa intiera e ben formata col-
„ le sue quattro corna simili a quelle che hanno le lumache
„ non tagliate, salvo il colore, e la mollezza, come ho no-
„ tato in generale. La seconda le sole due corna maggiori ,
„ molto belle e lunghe, ma per quanto si stimolasse, nel luo-
„ go delle corna piccole non si potevano vedere che due pun-
„ te , che incominciavano a spuntare . La terza avea ripro-
„ dotta parte della testa, e moveali, ma non si vedeano che
„ i principj delle corna maggiori . La quarta gettò fuori le
„ corna maggiori, grosse al solito, ma corte. La quinta man-
„ dò fuori una parte della testa , e incominciava a gettare
„ le corna maggiori. La sesta due bianchiccie protuberanze ,
„ che erano il principio delle corna maggiori. Nella settima
„ e nell' ottava osservai lo stesso , se non che nella settima
„ scorgevasi anche i principj delle corna minori. Nell' altre
„ quattordici chiaramente notava il moto vitale, e una par-
„ te di testa riprodotta, più bianchiccia del resto del corpo,
„ senza alcun segno visibile di principio delle corna . Il più
„ volte nominato Sig. *Pusini* avendo tagliate più lumache ,
„ me ne ha fatto vedere una colla testa interamente forma-
„ ta di nuovo, fornita delle quattro corna parimente di nuo-
„ vo prodotte , come a chiare note lo comprovavano e la
„ maggior mollezza, e il più bianchiccio colore, che nel vec-
„ chio corpo della lumaca.

„ Questo è quanto posso notificarle in testimonio di quella
„ stima ecc.

Brescia 28 Settembre 1769.

Suo Umiliss. e Devotiss. servitore
GIAMBATTISTA SCARELLA C. R.

L' anno appresso che mi furono gentilmente comunicate da questo Padre le sue Osservazioni, intesi dall' illustre mio Amico Sig. *Bonnet*, che il Sig. *Schaeffer* di Ratisbona aveva poco prima pubblicato un suo scritto di esperienze, che mirabilmente confermava le mie. Il perchè mosso io dal desiderio di aver lumi ulteriori, venni in pensiero di scriverne all' Autore istesso da cui ebbi obbligantemente questa risposta.

„Così è appunto, o Signore. Le mie sperienze, e osservazioni intorno alle lumache hanno verificato pienamente le vostre. Fors' anche io ho spinta alcun poco più in là di voi la mia curiosità. M' incresce l' avere scritto le mie esili dissertazioni in tedesco, e di non avere il tempo per potervene fare un compendio in latino, o in francese. Come posso, io supplisco a questa mancanza coll' unire alla lettera un picciolo estratto composto da un Amico, e sono intanto ecc.

Ratisbona li 8 Marzo 1770.

Vostro Umiliss. Obbligatiss. servo
GIACOMO SCHAEFFER.

Estratto relativo alla Riproduzione delle Lumache.

„Sono state fatte da poco tempo in qua alcune osservazioni di storia naturale molto singolari intorno alle lumache.

„Nel 1753 il Sig. *Ziegenbalg*, dotto Danese, presentò all' Accademia di Copenague una Memoria in cui fece conoscere che alcune lumache, alle quali aveva tagliata la testa, erano restate vive, ed avevano anche continuato ad

„uscire del guscio, e ad entrarvi secondo il costume. Quan-
 „tunque simil fenomeno dovesse apparire straordinario, non
 „si è però saputo che se gli abbia data tutta l'attenzione
 „che meritava. Non è che nel mese di Marzo del 1768
 „che il Padre *Boscovich* annunziò al Sig. de la *Condamine*,
 „che l' Abbate *Spallanzani*, Professore di Filosofia in Mo-
 „dena, avendo tagliata la testa a diverse lumache terrestri,
 „non solamente questi animali non erano morti, ma che
 „dopo l' essersi per qualche tempo ritirati ne' loro gusci,
 „ne erano in seguito usciti, come naturalmente sogliono
 „fare, e che finalmente rifabbricata avevano una testa no-
 „vella, organizzata come la prima.

„Una osservazione di questa natura non poteva che eccita-
 „re la curiosità de' Naturalisti. E però non è a maraviglia-
 „re se è stata subito ripetuta, così in Francia, che in Ger-
 „mania. Il successo ne è stato costantemente il medesimo. Ma
 „sopra tutto il celebre Sig. *Schaeffer* di Ratisbona è stato
 „quegli che ha messo cotai fenomeno fuori di qualunque in-
 „certezza. Questo grande Naturalista reiterate avendo più
 „volte queste esperienze su le lumache, ha veduto costante-
 „mente rinascere non solamente le teste, ma le code ezian-
 „dio che loro aveva tagliate. Ha pubblicato le sue espe-
 „rienze l' anno scorso in un Trattato ornato di figure mi-
 „niate.

„Abbiamo di nuovo ripetute queste esperienze li 9 Mag-
 „gio dell' anno passato, avendo noi a tal fine recise le te-
 „ste a venti sei lumache. Due sole sono morte dopo il ta-
 „glio. Le altre sono vissute tutte, ed hanno riprodotte le
 „teste „.

Nell' anno 1769 il Sig. Ab. *Troilo*, attuale Bibliotecario
 di S. A. S. il Sig. Duca di Modena, e Professore emerito di
 Fisica Sperimentale in quella Università, si esercitò egli pure
 su lo stesso soggetto, e nel 1770 si compiacque ragguagliar-
 mi dell' esito con sua umanissima lettera de' 28 Aprile dello
 stesso anno; la qual lettera per essere alquanto lunga riferirò
 in compendio.

Le lumache al numero di 124, e della specie nomata *ne-
 moralis*, furono mutilate li 5 di Maggio. A 68 venne con
 tagliente forbice troncata ad un colpo tutta la testa, con di

più una porzione del collo. A 28 tutta la testa precisamente. E ad altre 28 la metà quasi della medesima, cioè a dire quella porzione che abbraccia le due corna minori, le labbra, le due mandibole col proprio dente, e i diversi muscoli che accompagnano cotesti organi.

Parliamo primieramente delle prime. Li 29 del suddetto mese ne eran già perite 49: una però cominciava a ricuperare una sensibil porzione di testa: alcune altre rifatto avevano il sinistro corno maggiore, e il restante di esse, fuor d'una sola, manifestava un principio di riproduzione. Tutte queste rigenerazioni però nell'entrante Giugno fecero pochissimi progressi, malgrado l'accresciuto calore dell'atmosfera, che sappiamo quanto influisca su le riproduzioni: e intanto lasciavan di vivere altre lumache, così che li 14 dello stesso mese, delle lumache 68, cui oltre il capo era stato levato un pezzo di collo, nessuna restava più in vita.

L'affare fu ben diverso nelle 28 lumache, cui era stata per intero tronca la testa, senza però intaccare altre parti. Li 29 di Maggio, cioè 24 giorni dopo la decapitazione, non ne era perita che una, e intanto da quasi tutte pullulavano più o meno le nascenti corna, ovvero un principio di testa. Nell'entrante Giugno queste parti erano considerabilmente cresciute, e la prova decisiva che la testa in alcune, che per la rigenerazione si erano portate meglio dell'altre, erasi già compiuta, fu che si cibarono di latuca che venne loro somministrata.

A quel modo che si ebbero le riproduzioni dell'intiera testa, era ben credibile che molto più facilmente si sarebbero ottenute l'altre della testa dimezzata. Così appunto ci fa sapere il nominato Sig. Abbate, che termina la sua lettera con l'avvertire due cose, l'una che malgrado la facilità, e la prontezza delle sue lumache nel riprodurre, ve ne furono però alcune che nei primi giorni di Settembre non avevano riacquisita interamente la testa; l'altra che in mezzo a più mostruosità che accompagnavano diverse riproduzioni ve n'era una bizzarrissima, consistente in due corna, l'un maggiore, l'altro minore, situate al lato destro del capo d'una lumaca, le quali essendo sempre cresciute unite, e come insieme

incollate, venivano a formare un sol corno più grosso, e men lungo di un corno naturale maggiore.

Diversi anni dopo queste ultime esperienze, e quando meno io l'avrei pensato, vennero a luce tre scritti novelli, confermatori delle mie osservazioni, due del Sig. *Bonnet*, e un terzo del Sig. *Senebier*, Bibliotecario della Repubblica di Ginevra. I precipui motivi, che indussero questi due Naturalisti a sperimentare essi pure le lumache, furono i dubbj sparsi contro di esse da' Signori *Adanson*, e *Murray*. Trovato avendo pertanto che questi dubbj erano mal fondati, pubblicarono per amore del vero le loro esperienze, il Sig. *Senebier* in una lettera, che è inserita nel Giornale di Fisica dell' Ab. *Rozier*, la qual lettera per essere assai breve, trascriverò per intiero; e il Sig. *Bonnet* in due Memorie, da lui stampate nella recente edizione di tutte le sue Opere, delle quali Memorie basterà pel mio scopo, e per istruzione di quelli che non le hanno vedute, il recar qui un fuccinto ragguaglio.

Lettera del Sig. Senebier Bibliotecario della Repubblica di Ginevra, Membro di varie Accademie Scientifiche ecc. all' Editore del Giornale di Fisica, stampata nel Foglio del mese di Agosto per l' anno 1777.

Mi prevalgo di questa occasione per annunziarvi che ho
 „ ripetuto la singolare osservazione del celebre Ab. *Spallan-*
 „ *zani* fu la riproduzione delle teste che si tagliano alle lu-
 „ mache de' giardini. Io mi ci sono impegnato dalla lettura
 „ della Gazzetta di Gottinga, dove ho veduto l'estratto d'una
 „ Memoria del Professore *Murray*, la quale messe in dubbio la
 „ verità di queste osservazioni; e perchè d'altronde io so esser-
 „ vi in Francia, e in altre parti diversi non ignobili Offer-
 „ vatori, che riguardano le hanno come chimere. Io vi scri-
 „ vo questo al presente, perchè la stagione è favorevole a si-
 „ mili riproduzioni; ed opportuna a ripetere questo genere di
 „ osservazioni.

„ Nel giorno 15 di Aprile di quest' anno tagliai la testa a
 „ 12 lumache di giardino. Mi assicurai che l' amputazione
 „ era stata ben fatta, notomizzato avendo la testa tagliata
 „ sotto la lente, e il microscopio, e confrontando ciò ch' io

„ vedeva con l' esattissima descrizione che ne dà lo *Swam-*
 „ *merdamio* . Ho potuto altresì accertarmene su gli stessi a-
 „ nimali mutilati , spesse volte da me veduti strisciarsi sopra
 „ le interne pareti de' vasi di cristallo dove si trovavano rin-
 „ chiuti . In capo a tre settimane una di queste lumache
 „ mostrò la testa , e le maggiori corna riprodotte ; vidi spun-
 „ tare altresì le due corna minori , e presentemente questa
 „ lumaca è ritornata così perfetta , come lo era prima della
 „ decapitazione : mangia come l' altre ; e l' ho veduta accop-
 „ piarsi con altro individuo della stessa specie , che le ho da-
 „ to a compagno .

„ Le altre undici mi fanno vedere diverse varietà , e tra
 „ queste undici non avviene alcuna che mostri una compiuta
 „ riproduzione ; ve n' è una altresì che ne dà appena un leg-
 „ gieri indizio ; altre non hanno che un corno riprodotto
 „ alla naturale sua lunghezza , o qualche altra parte ridotta
 „ a perfezione , ma l' altre parti si vanno perfezionando in
 „ alcuni altri individui .

„ Ve n' è uno , di cui tutte le parti che cadono sotto i
 „ sensi , si riproducono nel tempo stesso , e in proporzione fra
 „ loro . Niuna di queste lumache è ancor perita , , ,

Ginevra 15. Giugno 1777 .

Passiamo ora a dare un trasunto delle due Memorie del Sig. *Bonnet* . Si aggira la prima , e buona parte della seconda su quella specie di lumache da lui chiamata di *grandezza mezzana* , che trovasi facilmente ne' giorni piovosi dentro a' giardini , il guscio della quale in alcuni individui pende al giallo , e in altri si vede ornato di fascie circolari , quando nere , e quando brune . Perchè l' amputazione fosse fatta a dovere il Filosofo Ginevrino usò le maggiori cautele . Diede tempo alla lumaca di allungarsi quanto più le era possibile . Presentò più volte il tagliente coltello alle radici della testa prima di dare il colpo ; e non credette l' operazione ben fatta , se non se quando già spiccata dal collo ebbe su la sua tavoletta la testa interissima .

Il primo saggio venne dal Sig. *Bonnet* intrapreso li 8 Maggio 1777 sopra dodici lumache , mutilate ciascheduna nel

modo indicato, cioè a dire per l'intera testa, rigettato avendo l'altre tutte che non erano state perfettamente decapitate: e nel tempo che scrivea questo tratto della sua Memoria (che era li 15 Luglio dello stesso anno 1777) dice ch'ei si trovava aver tuttavia su la tavoletta le dodeci teste separate da' loro tronchi. E discende l'oculatissimo Ginevrino Sperimentatore a tal circostanza, troppo premendogli di andar contro a qualunque contrario dubbio, a qualunque cavillo.

Li 23 Giugno due lumache rifatta avevano in parte la testa, ma in una terza si vedea già interamente compiuta. L'importanza del fatto esige ch'io lo descriva con le parole istesse dell'Autore. „ Le quattro corna in questa lumaca erano „ perfettamente compite, ed acquistata avevano tutta la grandezza che è propria delle corna di questa specie. La bocca sembrava ella pure benissimo rifatta; la sua apertura veniva ad essere ben terminata, e le nuove labbra che non potevano essere più distinte, avevano la forma, e le porzioni, che dovevano avere. In somma questa lumaca era sì perfettamente simile all'altre lumache della sua specie, che non sono state mutilate, che io non poteva distinguerla, che per la diminuzione della sua statura, e per la sua trasparenza„.

L'altre lumache riprodussero elleno pure più o meno, e di 12 che erano state decapitate una sola li 27 Luglio era perita.

Li 12 Maggio del medesimo anno il Sig. *Bonnet* aveva pure decollato 30 altre lumache della medesima specie, e l'operazione era stata fatta in queste come nelle prime, cioè a dire con l'amputazione dell'intera testa, e con le stesse avvertenze, e cautele. Ma qui ne perirono più di due terzi. Quelle però, che sopravvissero al taglio, rigenerarono le parti perdute con più o meno lentezza, e presentarono all'osservatore varie mostrosità, che avea pur vedute in alcune delle dodeci lumache da lui mutilate li 8 Maggio, le quali mostrosità essendo analoghe alle vedute da me, ed indicate nel *Prodromo*, e nella prima Memoria, non ho creduto necessario di doverle qui riferire.

E qui termina l'Autore il racconto de' suoi tentativi descritti

scritti nella prima Memoria, con queste notabili parole. “Pre-
 „ sentemente non procederò più oltre ne’ dettagli di mie es-
 „ perienze intorno alla rigenerazione delle lumache. Io mi
 „ propongo di parlarne di nuovo in altra Memoria. Sembra-
 „ mi frattanto di averne detto più che a sufficienza per pro-
 „ vare che nulla vi è di più certo di questa maravigliosa ri-
 „ generazione,,.

Rimane ora a toccare i risultati dei tentativi della secon-
 da Memoria, intrapresi dal Sig. *Bonnet* nel 1778 e 1780. Que-
 sti risultati però in generale sono, che le lumache deca-
 pitate in que’ due anni non lasciarono esse pure di riprodur-
 re, e le riproduzioni vennero accompagnate da quelle ano-
 malie, e mostrosità che da lui erano state osservate l’anno
 1777. Ma qui è necessario di più l’avvertire una particola-
 rità. I tentativi della prima, e seconda Memoria fin qui ac-
 cennati, li riferiscono tutti alla medesima specie di lumaca,
 cioè a quella che l’Autor chiama di *mezzana grandezza*. A
 render più compiute le sue esperienze stimò egli che conve-
 nisse il fare eziandio qualche saggio su l’altra qualità di lu-
 maca, detta *belix pomatia*, che è delle più grosse che si tro-
 vano ne’ contorni di Ginevra; essendo anche stato consiglia-
 to a far ciò dal Sig. *Adanson*, che gli scriveva che questa
 lumaca a preferenza di qualunque altra lo doveva pienamen-
 te convincere, siccome aveva convinto lui stesso, essere la
 decantata riproduzione del capo una pura preta menzogna
 (a). A dodici di queste lumache venne adunque dal Sig.
Bonnet recisa l’intera testa li 24 Maggio 1780. Dopo alcu-
 ne settimane eran perite a metà. Li 30 Agosto la piaga nel-
 le sei lumache che ancor vivevano si era perfettamente ram-
 marginata, senza però che apparisse ancora verun principio
 di testa rinnovata. Verso la metà di Ottobre non ne rima-
 nevano più di vive che quattro, le quali però furono bastan-
 ti a far vedere, che anche in questa specie il risuscitamento del-

Tomo II.

Xxx

(a) La Lettera del Sig. *Adanson* è stampata nel principio della seconda Memoria del Sig. *Bonnet* su la Rigene-
 razione della testa della lumaca, della qual Lettera dovrò parlare nell’Arti-
 colo III.

la testa non è un sogno o una visione, ma un fatto reale. Tutte quattro adunque diedero a quel tempo le più indubitate pruove di una verace riproduzione, anzi d'una riproduzione molto inoltrata. Non m' estendo a particolarizzarne col nostro Autore le circostanze, per essere troppo simili a quanto è stato detto di sopra sul riparamento del capo nell'altra specie di lumaca di mezzana grandezza.

Ed eccoci al fine della narrazione dei risultati, in virtù de' quali i Signori *Roos*, *Lavoisier*, *Turgot*, *Tenon*, *Herissant*, *Müller*, *Scarella*, *Schaeffer*, *Troilo*, *Senebier*, e *Bonnet* hanno confermata la mia scoperta. Ma tale scoperta acquisterà, come spero, vie maggiormente la confidenza dei dotti, coll' arricchirla di tre scritti inediti, pubblicando i quali son certo di far cosa grata ai lettori, per esser parto di tre valorosi Italiani, pubblici Professori di Notomia, e celebri già per più interessanti Opere da lor date in luce. E questi sono i Signori *Caldani*, *Girardi*, e *Pratolongo* giuniore, i quali in questi ultimi anni essendo stati da me pregati a sperimentare su i nostri rettili, e a scrivermene con filosofica libertà quanto in seguito intorno ad essi osservato avessero, si sono gentilmente compiaciuti di condiscendere alle mie istanze, mediante tre Lettere, che qui trascrivo con quell'ordine di tempo, col quale giunte mi sono.

Amico Pregiatissimo.

Eccomi finalmente a soddisfare le premure vostre, epilogando in questa mia i successi delle osservazioni, che mi comandaste sino dall' anno scorso, intorno alla facoltà che hanno le lumache di riprodurre la testa, quando fu loro tagliata. Credo che la sposizione dei fatti possa bastarvi: il diario delle osservazioni è soverchiamente lungo, ed è scritto sì male, che durereste non poca fatica a leggerlo, nè adesso io avrei tempo di farne una copia un po' diligente.

Diedi principio alle mie osservazioni il dì otto dello scorso Luglio, servendomi di quelle lumache, le quali noi qui chiamiamo comunemente di orto, o di giardino: che hanno la buccia, o cassa anzi oscura di colore, che no, e di figura, la quale alla sferica molto si accosta.

A diecisette di queste , alcune delle quali erano alquanto grandi , ed altre piccole , ho troncato il capo dietro le corna maggiori , e ciò con le seguenti cautele .

Mi procurai una tavoletta di legno duro , più piana , che fosse possibile , fu della quale le collocai . Posta questa tavoletta al Sole , aspettai che fortissimo dal guscio , e che camminando strisciasse la testa ed il corpo tutto allungato sulla tavoletta medesima . Quando ciò accadeva , con un rasoio ben affilato , ma però di filo robusto , e non pieghevole , troncai loro il capo in un sol colpo , e nel luogo indicato , procurando che il taglio del rasoio fosse perpendicolare al piano della tavoletta . Si ritirarono tostante esse nella buccia , gettando dal troncone una materia viscida , e schiumosa , che in molte era di colore verdastro . Appresso le posi in un vaso , entro cui eravi della terra d' orto , e le coprii con un vaglio .

Passai dopo di ciò ad anatomizzare le teste tagliate appresso di averle conservate per poco nell' acqua tiepida , e ciò perchè si gonfiassero un pocolino , atteso che si erano queste teste contratte sensibilmente . Ho ritrovato in tutte non solo la parte superiore della testa con le sue quattro corna , ma sibbene anche l' inferiore colla bocca corredata delle sue labbra , col dente , e con una parte insieme del faringe .

Io qui non saprei dirvi se queste lumache fossero di quella specie , che i Francesi chiamano *Escarbot* , e che sono descritte e delineate dallo *Swamerdamio* nella sua *Biblia naturale* . Se rifletteva alla loro figura , in generale mi sembravano appunto di quelle ; ma guardate con più di attenzione e coll' ajuto di una lente piuttosto dolce , siccome fuol dirsi , pareva che vi corresse qualche divario : imperciocchè quelle dello *Swamerdamio* (*Tav. 2. fig. 7.*) hanno il corpo sparso qua e là di tubercoletti isolati , e di figura irregolare . Laddove le mie erano tutte seminate di tubercoletti bislungi , strettamente uniti insieme sì che apparivano come altrettante vescichette ellittiche , e pellucide ; non tutte veramente di ugual grandezza , ma pressochè tutte , e di certo non isolate , e contornate da altra sostanza palese all' occhio . Queste vescichette però erano bislunghe , quando il corpo della lumaca allungavasi , e quando si raccorciava , divenivano rotonde .

Da questa qualunque descrizione voi riconoscerete meglio di me, siccome valente Naturalista che siete, quale specie di lumache si fosse quella, sulla quale ho fatto le mie sperienze. Forse il nome francese *Escargot* indica soltanto le chiocciole in genere, e non già ne significa una specie particolare.

Passo ora a darvi i risultati delle mie osservazioni, e vi fo sapere che di diciassette lumache non me ne sono restate vive, che quattro solamente. Se di questa disgraziata morte debba accagionarli il caldo eccessivo della stagione, o la mia soverchia curiosità che mi faceva visitarle spesso senza voler considerare che il taglio, o separazioni di una parte sì rispettabile potea divenir più fatale per l'azione dell'aria, e del Sole, a cui le esponeva lungamente per osservarle con attenzione, io non so ben deciderlo. Eter potrebbe ancora, che la tarda evoluzione della testa, siccome sentirete appresso, sia stata un effetto della mia tardanza nell'accingermi alle sperienze: non essendo forse difficile a crederli, che se ciò avessi fatto nel fiore della primavera, dove tutto ciò, che vive, è più vispo, e sugoso, che in altri tempi, e le lumache mi farebbero restate vive in maggior numero, ed avrebbero rifatta più presto la nuova testa.

Non crediate però, che mancassero di vita contemporaneamente. Due morirono dopo quattro giorni: una terza appresso giorni ventotto: altre due scorse il dì trentuno: tre altre passati trentatre dì. Poscia ne trovai morta una dopo giorni sessantasei, e quattro altre a capo di ottantaquattro da quello dell'amputazione.

E' da notarsi ancora, che non tutte tredici hanno lasciato di vivere, senza aver dato prima alcun segno della riproduzione della testa troncata. Imperciocchè due di esse aveano incominciata molto sensibilmente questa riparazione, e le corna maggiori erano rifatte più della metà; siccome pure molto avanzate le labbra, ed il dente. Eravi però un difetto, o mostruosità nelle nuove di una delle due: perchè non erano separate, come sogliono essere, ma unite in guisa che rappresentavano un solo corno, e di figura perfettamente conica.

Nelle altre undici, siccome in tutte le altre, osservai per ordine le seguenti mutazioni, le quali in altre accaddero più presto, in altre più tardi. Ne' primi dì, dopo l'amputazio-

ne, il troncone mostravali quali piano: appressò forgeva lentamente un tubercoletto, sì che il troncone appariva convesso: la pelle sagrainata, ossia la cute, si avanzava un poco più verso gli orli del tubercoletto indicato: dal centro di questo tubercoletto si alzò un punto negro in quella che rifece le corna unite in uno; là dove nelle altre cinque, che ripararono la testa per intiero, li punti neri furono due, uno per parte del tubercoletto, e continui a un filo nero, che si osservò in appressi. Que' punti negri erano manifestamente gli occhi, e i fili erano i nervi ottici.

I progressi di questa nuova evoluzione furono piuttosto lenti, generalmente parlando: dacchè il tempo più corto al certo principio dello sviluppo delle corna maggiori, e del labbro superiore, si fu di dodici giorni in una delle sei: il più lungo di giorni novantasette in un'altra: in giorni diciannove, in ventotto, in trentasei, in quarantanove, diede principio nell'altre l'indicato sviluppo, il quale non ebbe compito fine, in quelle che mi rimangono, se non dopo quattro mesi e mezzo finiti. E qui posio assicurarvi, che a tutta ragione dico aver avuto lo sviluppo della testa compito fine: e ciò non tanto perciò che ne mostra l'occhio armato di lente, ma sibbene anche perchè hanno palesemente rosicchiate delle foglie tenere di lattuca; della qual' erba ho veduto che quattro (e son quelle, che vivono attualmente) se ne servivano ancora come di cartella, avendola tirata molto addentro della lor buccia.

Nè dee recarvi meraviglia se la provvida natura ha suggerito loro questo ripiego, quando vi sovvenga di aver voi similmente veduto, che le lumache senza testa, e quindi per lunga stagione digiune, mancano poi dopo in certo tempo di quel glutine, con cui la risarciscono allorchè l'hanno perduta; e quando la riproducono, ella è sempre più tenue, cioè in ragione del tempo del loro digiuno.

Ho detto che incerto è il tempo, in cui mancano di materia riparatrice della cartella: e ciò perchè alcune cessarono di risarla dopo diciannove giorni, ed altre appressò quarantotto. Questo difetto di glutine fa temermi ancora della vita delle quattro che mi restano di tutto il numero. Ed avvegnachè io le conservi in luogo tiepido, e vivano certamen-

te , anzi in pruova di avere mangiato abbiano rifatta una tenuissima cartella , pure non mi lusingo che la possano durare a lungo , essendo elleno nutrite pochissimo , e quindi inette a vivere lungamente .

Di queste mie sperienze poco ancora mi resta a dirvi ; nè vo' tacervelo , sebbene si tratti di cosa , che voi pure avrete molte volte osservata . L' una sì è , che più tardo è il rifacimento delle corna minori rispettivamente alle maggiori , e alle labbra : l' altra , che in alcune le corna non sono talvolta uguali in lunghezza e grossezza : e finalmente , che non ho mai veduto , che si rifaccia la pelle fagrinata .

Ho epilogato sino a qui i successi delle osservazioni , che m' imponeste di fare . Io non so veramente qual fosse l' oggetto del comando vostro circa una materia , che voi , Amico pregiatissimo , prima d' ogni altro , indi il celebratissimo Amico nostro comune Sig. *Bonnet* , ed anche altri illustri osservatori maneggiarono con tanta bravura ed evidenza . Non mi posso recare a credere , che v' abbia persona dotta , che oggi dubiti di questo fatto , dopo la diligenza , la precisione , e le avvertenze vostre per non omettere alcuna delle circostanze , dirette al felice e niente dubbioso esito delle sperienze . Tuttavia se per avventura v' ha alcuno che non presti fede a quanto su questo argomento voi dottamente pubblicaste , io mi lusingo che vorrete invitarlo a venir qui tra noi , e replicare in compagnia vostra le contraddette osservazioni . Sono ecc.

Di Padova 27 Dicembre 1783 .

IL VOSTRO CALDANI .

Reverendiss. Sig. Sig. Pad. Colend.

Dal gentilissimo foglio di V. S. Reverendiss. ho compreso ch' ella desidera di avere qualche notizia delle osservazioni da me fatte intorno alla riproduzione della testa delle lumache . Il di lei desiderio è per me un espresso comando , a cui ubbidisco tanto più volentieri , quanto che ho la piacevole soddisfazione di annoverarmi tra quelli , che hanno con-

fermata questa di lei scoperta; avendo tentate felicemente alcune esperienze, delle quali gran parte, per essere stata sottoposta all' esame del pubblico, per convincere alcuni Critici, che pubblicavano questo fatto di fisica animale come impossibile, ha perciò acquistato quel grado d' autenticità, che da taluni forse in questa sorta di prove potrebbesi credere necessaria, affine che possano valere a dimostrare senza contrasto, che la rigenerazione della testa di questi rettili non è una semplice visione di alcuni pochi Naturalisti.

Le prime mie esperienze furono fatte l' anno 1780 in occasione, che in certi Fogli, i quali si pubblicano ogni settimana fra noi, trovai inserite alcune lettere in cui da certi Anonimi io era sfidato a mostrare la riproduzione della testa delle lumache, ch' ella recise in mia casa la prima volta, che venne in questa città. Non potendo soddisfare alla loro curiosità per esser periti tutti que' rettili, cred' io per cagione della alterazione avvenuta nella crusca, dentro la quale per conservarli furono da me incautamente riposti tutti bagnati, e riflettendo che a nulla sarebbe servito per convincerli il citar loro le felici prove fatte da Müller, Schaeffer, Roos, Bonnet, Lavoisier, ed altri accuratissimi Naturalisti, che confermarono questa scoperta, deliberai di rifare di nuovo le esperienze.

Presi a 10 di Luglio, tempo che è reputato il più favorevole al buon esito delle riproduzioni, dodici lumache della specie, che Linneo nella Fauna Svecica chiamò *Helix pomatia*, e simili a quelle che inviai a V. S. Illustriss. l' anno passato. Premuroso che le mie prove riuscissero a dovere, non mancai d' usare tutte quelle precauzioni che mi sembrava richiedere questa specie di delicate esperienze; trascurando le quali avviene che questi rettili periscano, come appunto per mancanza delle dovute precauzioni perirono quelle decapitate da' Signori Adanson, e Bonmare, e dal P. la Cotte. Non volli pertanto (ed ella forse in ciò mi troverà troppo scrupoloso) per farle sortire dal guscio immergerle nell' acqua, come ella aveva praticato, e come senza che ne avvenisse pregiudizio a quelle sue lumache praticò il Sig. Bonnet. Ma posatele su delle tenere erbe aspettai pazientemente, che uscissero dal guscio da per se stesse. Quando vedeva, che aveano

ben allungata la testa, con un paio di ben affilate forbici la recideva loro immediatamente al di dietro delle grandi corna. La parte recisa d'ogni una era da me accuratamente esaminata, procurando che chi assisteva a questa operazione osservasse in essa le quattro corna, la bocca, e perfino i denti, affinchè la testimonianza di spettatori potesse addursi per risposta a' nostri Censori nel caso che seguendo la riproduzione mi avessero obbiettato, per impugnarla, quello che obbiettava il Sig. *Adanson*, cioè a dire, che non erasi tagliata la testa, quella macchina compostissima, quale ce la dimostra la notomia fattane da *Swamerdam*, e da *Muralt*, ma la di lei semplice calotta. Finita l'operazione rinchiusi le lumache in una giarra, che ricoprii di carta tutta forata affine che l'aria interna potesse cangiarsi e non divenisse nocevole alla vita di questi rettili. A 28 d' Agosto ritrovai tutta lacerata la carta che serviva di coperchio, ed alcune lumache attaccate alla superficie esterna del vaso. Posatele di nuovo sull' erba, esse uscirono fuori del guscio, e le ritrovai tutte dodici vive. La riproduzione però non era in tutte egualmente avanzata, perciocchè in alcune solo se ne vedeva il principio, mentre in altre era quasi del tutto compita. In alcune vedesi spuntare sul troncone una specie di globetto biancastro, in altre sul globetto già più cresciuto si vedevano ripullulare uno, o più corna disuguali in grossezza, ed in lunghezza, osservandoli, che le corna posteriori invece di terminare con una specie di globo terminavano in un apice su cui appariva un punto nero, che certamente era l'occhio. In quelle poi nelle quali la riproduzione era quasi del tutto ultimata vedesi la testa distinguibile dall' antica, per un certo colore meno carico, e per essere essa non ancora ben fornita di tutte quelle parti, che entrano nella sua composizione, giacchè in altre di queste vi era solamente formato uno delle corna maggiori, in qualche altra si osservavano tutte due, ma non egualmente lunghe, in qualche altra oltre le corna maggiori ripullulavano ancor le minori. Io amputai di nuovo la testa ad una di queste lumache, nella quale ritrovai che non erasi ancora riprodotto il dente, mentre la lacerazione della carta sopraddetta che copriva la giarra mi aveva assicurato, che in alcune i denti erano già rigenerati.

Veduto

Veduto il felice successo di queste esperienze, mandai molte di queste lumache all' Editore de' pubblici fogli con una lettera nella quale lo pregava d' invitare i nostri Censori ad osservare il risultato delle mie prove. Io ebbi la soddisfazione di leggere nei fogli seguenti una loro risposta, nella quale confessavano essere restati convinti, che la rigenerazione della testa delle lumache era una fisica verità, che essi avevano riguardata fin' allora come un prodigio non ancora ben accertato, sedotti dall' elito di alcune loro prove mal eseguite.

Io non avrei più pensato a decapitare altri di questi rettili se sorpreso dalla varietà che osservai nei sopradetti sì riguardo ai progressi della riproduzione nei diversi individui, sì riguardo all' ordine della rigenerazione delle diverse parti della testa, non mi fossi invogliato d' investigare da quali principj dipendano queste varietà. La costanza, con cui si osservano queste tali bizzarrie, come conobbi paragonando le mie esperienze con quelle di V. S. Reverendiss. , e de' Signori *Bonnet*, e *Senebier*, m' avevano accertato, che esse non potevano averfi per scherzi della natura, ma che dovevano dipendere da leggi costanti ed invariabili. Ma queste leggi sono forse determinate dal taglio, ossia che questo si faccia più o meno avanzato, ossia che si faccia più o meno obbliquo? Questa questione, ch' Ella tra le altre ha proposta nel suo *Prodromo*, fu quella che mi proposi di esaminare.

Presi a tal oggetto sulla fine di febbrajo dell' anno scorso dodici lumache della medesima specie delle sopradette, ed usate tutte quelle precauzioni, che aveva praticate colle prime, recisi loro la testa, diversificando a bella posta il taglio. Nella metà di esse feci il taglio verticale, ma alcun poco più distante dalle grandi corna di quello che io avessi praticato nelle prime; nell' altra metà lo feci più, o meno obbliquo, lasciando in alcune intatto uno delle grandi corna. Le lumache furono esse pure al solito rinchiusse in una giarra coperta nell' istesso modo, e dopo un mese avendole visitate, ne ritrovai cinque morte, mentre l' altre sette aveano formato il loro coperchio. Su queste avrei voluto fare le mie osservazioni; ma riflettendo che avrei dovuto far loro qualche violenza per farle uscire dal guscio, me ne astenni, ricordandomi di ciò che dice il Sig. *Plateretti*, che le violenze, che

si praticano a questo oggetto su questi rettili, lor divengono fatali, e sono sovente la cagione per cui si vedono andar a vuoto le esperienze. Aspettai fino al principio di Luglio, nel qual tempo rotto il coperchio, e posatele full' erba le ritrovai tutte sette vive, osservando che in esse, siccome era avvenuto nelle prime, la riproduzione non era egualmente avanzata. Di quelle a cui aveva fatto il taglio verticale due sole erano sopravvissute. Sul troncone di una di queste si vedeva spuntare un globetto bianchiccio, su cui rinasceva un corno, nell' altra la testa era quasi rigenerata del tutto, e vedevansi alzate due delle grandi corna, ma ineguali in lunghezza. Nelle altre cinque di quelle, in cui il taglio erasi fatto obliquamente, manifestavasi la riproduzione sotto l'apparenza di una massa informe, e che non aveva ancora presa quella giusta conformazione, che avrebbe dovuto avere. In alcune di queste si vedevano già rigenerate, e più o meno cresciute quelle corna, che erano state amputate, mentre in altre non ripullulavano ancora.

In queste mie seconde esperienze avendo osservata quella medesima varietà che mi si era presentata nelle prime, nelle quali il taglio erasi fatto uniforme, farei stato quasi inclinato a decidere che l'ineguaglianza della forza riproduttrice, che agisce nei diversi individui, siccome pure l'ineguaglianza di questa medesima forza, che agisce nelle diverse parti della testa, sia affatto indipendente dal taglio. Ma pensando che le leggi, con cui la natura regola questi fenomeni, non devono determinarsi da poche, ma da molte, e replicate osservazioni, io stimai meglio sospendere per allora il mio giudizio, e moltiplicare le mie esperienze.

Egli è perciò che sul finire dell'estate passata in compagnia del Sig. D. *Mongiardino* feci l'amputazione della testa ad un gran numero di lumache, diversificando il taglio in molte e differenti maniere, e non solo feci il taglio verticale una o più linee dietro le grandi corna, e lo feci ancora più o meno obliquo; ma in altre una, o più linee avanti le corna maggiori, ed in altre non recisi che la sola metà della testa. Poche sono perite, e le rimanenti osservate da me nei scorsi giorni vivono tuttavia. Ma nella presente fred-da stagione, siccome giusta quello che scrivono li Signori *Pla-*

teretti, e *Troia*, ed io ho pure verificato nelle mie seconde esperienze, la forza riproduttrice non è che pochissimo attiva, io non potrò soddisfare ancora per lungo tempo alla mia curiosità.

Il gran numero delle lumache, che nella scorsa primavera inviai a V. S. Reverendiss., avrà forse servito a mettere in chiaro le leggi, da cui dipendono queste varietà. Io mi lusingo, che le esperienze, ch' Ella avrà tentate sopra di quelle, avranno avuto principalmente per iscopo di decidere le questioni, che da lei furono proposte nel suo *Prodromo*, e che conducono alla scoperta di queste medesime leggi. Le farò moltissimo obbligato, se si compiacerà di significarmene il risultato. Io non dubito, quando Ella siasi occupata di queste ricerche, che da quella sua accortezza, con cui ha saputo sorprendere la natura in molti de' suoi più stupendi ed oscuri lavori, non sia condotta al suo termine la teoria di queste riproduzioni. La quale è tanto più interessante, quanto che serve ad illustrare moltissimo la Fisica animale.

Io sono col più profondo rispetto

Di V. S. Reverendiss.

Genova 10 GENNAJO 1783.

Umiliss. Obbligatiss. servitore
GIO: BATTISTA PRATOLONGO.

Al Signor Abate

L A Z A R O S P A L L A N Z A N I

Regio Professore di Storia Naturale nell' Università di Pavia
e Soprintendente al pubblico Museo della medesima.

MICHELE GIRARDI

A. C.

Il ricercarmi che fate, perchè io di nuovo tenti l' esperienze vostre sopra le lumache terrestri, altro non è che un effetto manifestissimo di quella imparziale premura, che vi

Y y ij

guida, per lo scoprimento del vero entro i misteriosi arcani della natura, onde sempre più luminosa trionfi con la verità l'esattezza delle osservazioni vostre, le quali sono su di tal base appoggiate, che l'ingiurie dell'invidia non temono nè quelle del tempo. Egli sembra un fatale destino, che le scoperte più luminose e più utili abbiano dovuto in ogni tempo incontrare acerbi oppositori, i quali sebbene non abbiano mai potuto oscurare quei benefici raggi di luce, che trapelavano per diradare le tenebre, pure hanno servito talvolta a ritardarne gli ulteriori vantaggiosi progressi. Questo inciampo nell'avanzamento delle cognizioni umane da due fonti, s'io mal non m'appongo, mi è sembrato mai sempre derivare, cioè dalla presunzione, che d'ordinario è figlia dell'ignoranza, e dall'invidia: dalla presunzione, perchè taluni, sdegnando di osservare, non fanno, nè possono persuadersi che vere siano quelle cose, che sorpassano i limiti del loro ristretto sapere; quindi ignorando quanto vi è di maraviglioso e sorprendente nel mirabile artificio della natura, tutto ciò, che non fanno, negano francamente: dall'invidia poi, perchè certi accigliati uomini, che vorrebbero sedere a scranna, tenendosi per saputi assai, mal soffrono che altri veggano più lungi di loro; quindi inalzato tribunale, null'altro potendo, condannano imperiosamente tutto ciò, che intralcia loro il cammino, e si oppone all'apice di quella gloria, la quale soli pretendono possedere.

Fra questi io non dirò certamente che siano mai li Signori *Adanson*, *Wartel*, *Cotte* e tant'altri, e particolarmente il Sig. *Adolfo Murray*, uomo dotto ed ingenuo e mio particolare amico, ma sibbene io credo che questi illustri Signori si siano opposti alle vostre scoperte, perchè rifatte non abbiano esattamente l'esperienze da voi instituite; oppure, il che è anche più ragionevole, le abbiano soltanto rifatte in alcune di quelle lumache, nelle quali il rinnovamento del capo non avviene, come noi pure non di rado abbiamo osservato. Questi soli adunque per mio avviso meritano, che si renda loro ragione di questo mirabile e particolare fenomeno, giacchè inutile sarebbe per gli altri, che nè fanno, nè vogliono persuadersi.

E prima ch'io vi trascriva il risultato delle mie osserva-

zioni, giacchè fastidioso troppo ed a voi inutile per certo farebbe il descriverle minutamente, permettetemi ch' io vi accenni quello, che osservare ho potuto nel notomizzare, per quanto è a me stato possibile, le lumache, e particolarmente la testa di queste, la quale è per avventura molto più composta di quello che taluno potrebbe facilmente darli ad intendere. Quanto però difficile sia il far questo, allora che vivono, lo conosce facilmente chi dar si voglia la pena di esaminarle: mentre o vogliansi osservare allora che stanno chiuse nel proprio nicchio, ivi sono così rannicchiate e ristrette, che difficilissimo riesce e quasi impossibile all' osservatore di esplorarle a dovere: oppure vogliansi considerare, allora che si strascicano distese fuori del proprio guscio, al solo toccarle si contraggono, si ritirano sì sollecitamente e per modo entro la loro abitazione, che rovesciatasi internamente con la parte anteriore del piede la cute del collo, vanno a rannicchiare, ed a nascondere la testa quasi nel centro del proprio corpo, producendo così quelle difficoltà, che abbiamo testè accennate; le quali difficoltà maggiori ancora si fanno, se vogliamo aggiungere quel tenace e vischioso umore, che in copia effondono, e la validissima forza muscolare, che hanno, mercè della quale allora che vengono tocche dal coltello anatomico, le parti sempre più fortemente si restringono fra loro.

Per declinar dunque per quanto sia possibile da queste difficoltà, tre furono le maniere da me usate nel notomizzar le lumache, la prima già proposta dal celebre *Swammerdamio*, a cui tanto dobbiamo in questa parte, lasciandole morire nell' acqua; l' altra di levarle dal guscio, allora che sono in moto, lasciandole così perire; la terza di riportarle nell' acqua fredda, facendole indi nella medesima per alcun poco bollire: nelle quali differenti maniere siccome non di rado avviene che rimangono col collo, capo, e talvolta anche con le corna fuori del guscio distese, così mi hanno somministrata occasione, onde poterle comodamente osservare.

La lumaca considerata allora che si strascica, portando seco la propria abitazione, o morta in posizione che a questa risponda, mostra per lo innanzi un lungo collo, il quale va a terminare nella testa, da cui spuntano quattro corna, due

maggiori e superiori, due minori ed inferiori, le quali allungate che sieno, internamente mostrano nelle estremità un picciolo globo, dal quale nelle due maggiori trapela un punto nereggiante, che diceſi l'occhio. La parte posteriore del collo ha il ſuo confine in una prominenza circolare, che comunemente labbro o pur collare vien detta, nella cui deſtra parte ſcorgeli un ſoro aſſai manifeſto inſerviente alla reſpirazione, ed in cui mette ſoce quell' inteſtino, donde eſcono gli eſcrementi. La parte ſuperiore del collo e della coda è coperta di una pelle ſagrinata glandulare, e variamente colorita ſecondo le diſerſe ſpecie delle lumache. La parte inferiore, di cui ſerveſi la lumaca per iſtraſcicarli, e che dicono piede, è liſcia facile coperta da tenuiſſima membrana, nel cui centro ſi veggono delle linee longitudinali, ed ai lati delle tranſverſali, che altro non indicano ſe non i faſcetti dei ſottopoſti muſcoli inſervienti alle varie loro azioni e reazioni. Quella parte anteriore ed eſtrema del piede, che corriſponde alla mandibola inferiore, con eſſa non ſi congiunge, e vi laſcia un picciolo vacuo intervallo tra l' una e l' altro, il che forſe è fatto, perche la mandibola ne' ſuoi neceſſarij moti eſſer poſſa più libera e più ſpedita. Al di ſotto delle corna minori ſi ſcorgono i labbri, che qualora ſi aprono, oltre i piccioli denti ſi vede la cavità della bocca e la lingua. Finalmente ſotto del deſtro corno maggiore, e forſe un poco poſteriormente vicino al piede vedeſi un tenue e bianco ſegno tra i piccioli granelli della cute, il quale è già noto null' altro eſſere ſe non ſe l' apertura ſemminile: e ſiccome le lumache tutte ſono ermafrodite, così al lato di queſte eſce l' arneſe maſchile (a) inſerviente alla generazione. Queſto ſegno, che anche dai più eſercitati difficilmente ſi ſcorge, diventa egli così turgido nel tempo degli amori, che compariſce manifeſtiſſimo. Mi è egli avvenuto più d' una volta di ſorprendere queſti animali nel tempo del loro accoppiamento, e di vederli ancora, allora che ſtanno per accoppiarli. Riſcontrati che ſi ſono, ed approſſimatiſi l' uno all' altro, rieſce piacevole il vedere, come ſcambievolmente prima d' unirſi ſi tentano, e ſi

ritentano col capo e col collo, e quasi a vicenda l' un l' altro solleticandosi s' invitano all' accoppiamento . Quindi disposti e dall' estro amoroso eccitati, arrovesciando fuori del capo il loro arnese maschile di ceruleo sangue turgido e gonfio , a vicenda e nel tempo medesimo l' introducono nell' aperta femminile natura , ed ivi l' internano , e vi si approfondano, e vi si avviticchiano per modo , che volendoli indi disgiungere, talvolta anche dopo due ore e più, piuttosto frangonsi i loro arnesi maschili, di quello che essi dal loro accoppiamento desistano. In questo forzato distendimento facile è l' osservare, come i canali, in cui si produce internamente l' arnese maschile, comprendano, e stringano il principio dell' appendice dell' utero e della vagina, che tutto trovasi in questa circostanza di sangue ceruleo intumidito e distinto.

Questo è quello , che si può vedere senza il soccorso del coltello, il quale però rendesi necessario, qualora vogliasi esaminare l' interna organizzazione e particolarmente del capo, che è l' argomento principale delle nostre ricerche . Recisa dunque nella parte superiore di mezzo longitudinalmente la cute e con questa il muscolo cutaneo, che copre il collo ed il capo , e rovesciata ai lati , si vede prima d' ogn' altro , oltre una tenue aracnoide membrana nella parte anteriore ed estrema, un globo quasi ovale (a) e prominente, che comprende le due mandibole, la bocca, la lingua, ed il cominciamento ancor dell' esofago . La mandibola superiore è cartilaginosa , e forma interamente il palato . Dalla parte anteriore ed estrema di questa propende un dente semilunare osseo, che sembra al colore ed alla figura uno di que' pettini di tartaruca, ai quali le nostre donne sogliono per vaghezza raccomandare posteriormente al capo gl' inanellati capelli . Questo dente non è che un aggregato di sei o sette denti incisori tutti appuntati inferiormente, ma agglutinati ed uniti in maniera , che formano un solo dente.

La mandibola, o piuttosto gengiva, o labbro inferiore non ha denti; è come distinta da due corpi molli laterali, quasi cilindrici, che comprendono d' ogni lato la lingua, il colo-

re dei quali è posteriormente carico ai lati dell' esofago. La bocca è circonscritta anteriormente e posteriormente da' denti e dall' esofago, superiormente ed inferiormente dal palato e dalla lingua.

La lingua non è libera, ma ritrovasi tutta ferrata ed unita alla gengiva inferiore. E' composta di due membrane ben resistenti, ferrate e quasi cartilaginose. La superiore si unisce alla membrana, di cui è coperta la mandibola inferiore, e scorrendo all' indietro, s' inflette posteriormente, e discendendo s' incurva, e si produce anteriormente sotto la membrana inferiore; indi recedendo, va a terminare in una picciola, cieca, e globosa appendice (a), che si vede prominente nella parte inferiore del globo ovale. Questa appendice contiene un bianco, allungato et incurvato cilindro solidetto, che mobile essendo, e corrispondendo alla parte anterior della lingua, ove comincia l' esofago, non sembra ivi essere dalla natura senza un particolare officio costituito. La membrana poi inferiore e sottoposta della lingua, che è di molto più crassa della superiore, convessa superiormente, inferiormente cava e semicircolare, ha la sua radice nella parte anteriore della mandibola inferiore, e termina libera ove la superior membrana posteriormente s' inflette. Questa struttura particolare di lingua sembra fatta per supplire al difetto dei denti, che mancano, onde soffrendo gli alimenti l' azione del resistente palato e della lingua, l' opera della masticazione venisse ad essere adeguatamente perfezionata.

Ove termina posteriormente il palato e la bocca, ivi comincia l' esofago, che si vede nella parte superiore e posteriore del globo ovale tra i due dotti salivali, che si uniscono al globo per penetrare nella cavità della bocca. E' questo nel suo cominciamento ristretto assai, ma in progresso si fa maggiore; è di un livido cenerino, ed è fatto di una tenue membrana a crespe longitudinali compiegata, mercè delle quali facilmente si dilata, e si stringe.

Sopra la parte anteriore del globo ovale ritrovasi talvolta
il

il cervello (*a*), di color pallidetto e come diviso in due lobi lateralmente allungati; diffi talvolta, perchè il cervello delle lumache è mobile, e cambia di luogo, secondo le varie mozioni delle medesime, ora ritrovandosi anteriormente, ed ora ritirandosi posteriormente del globo ovale sopra l' esofago, massime allora che sono fuori del guscio allungate e distese; il che avviene per opera di alcuni muscoli, che scorrono ai lati del cervello, e che sono mirabilmente ad esso per alcuni filamenti intralciati ed uniti. Questo cervello, che non ha forse in larghezza l' estension d' una linea, nè più di una e mezza in lunghezza, maggiore però e minore a norma della maggiore o minor grandezza delle lumache medesime, compartisce molti nervi, i quali sebbene siano stati distintamente delineati dal celebre *Swammerdamio*, pure non mi sembra fuor di propolito il descriverli, come è a me avvenuto di vederli; avvertendo per altro che, se in questi vi si riscontrasse qualche leggiera diversità, io non intendo che attribuiscafi a difetto altrui, ma piuttosto soffrirò che si ascriva alla mia non sufficiente destrezza in esaminare simili minutezze; e massime che nel rintracciamento di quelle io non mi sono servito di lente alcuna, per cui gli oggetti oltre al naturale grandeggiassero, bastandomi di distinguerli senza sospetto di travedimento o d' errore.

Dei nervi, che si propagano alla testa delle lumache, altri sono immediatamente procedenti dal cervello, altri mediante un ganglio, che vien formato dalle gambe (*b*) del cervello medesimo, le quali abbracciano secondo la varia posizione dello stesso ora la parte anteriore del globo ovale, ora l' esofago, e che ritrovali non molto maggiore di un grano di miglio al di sotto, ed anche un poco posteriormente, del globo ovale accennato. Seguendo l' ordine della sezione, diremo in primo luogo dei nervi del cervello, indi di quelli del ganglio.

Dal cervello nascono dodici nervi, cioè sei per ciascun lato, ch' io comprendo in sei pajà: altri dei quali scorrono

Tomo II.

Z z z

(*a*) Tav. J. let. *i*.

(*b*) Tav. I. let. *I*.

posteriormente, anteriormente altri. Il primo, che diremo muscolare, nascendo dalle gambe del cervello medesimo va posteriormente ad inserirsi nel muscolo retrattore del globo ovale; gli altri cinque si distribuiscono anteriormente, e sono i labiali superiori, i labiali inferiori, i mandibulari, gli ottici maggiori, gli ottici minori. I labiali superiori nascono dalla parte anteriore del cervello, e scorrendo ai lati del globo ovale, si dividono anteriormente in due manifesti filamenti, l'uno dei quali va a spiegarsi nella parte superiore dei labbri superiori, l'altro termina nell'inferior parte dei labbri medesimi. I labiali inferiori cominciano inferiormente in vicinanza dei superiori, scorrono a lato dei primi, indi passano sotto al globo ovale, e vanno a distribuirsi in più filamenti nella mandibola o labbro inferiore. I mandibulari hanno origine nella parte posterior del cervello, e scorrendo posteriormente, s'inseriscono nel globo ovale in vicinanza dei dutti salivari, e si diramano per la bocca, gola, e palato. Gli ottici maggiori vengono dai lati del cervello, si attaccano per mezzo di una tenue membrana al muscolo motore dei corni maggiori, e vanno a terminare in un bulbo periforme nelle estremità dei corni medesimi. Gli ottici minori, oppure i nervi dei corni minori, nascono egualmente dai lati del cervello in vicinanza dei maggiori, s'uniscono al muscolo dei corni minori, e divisi in più filamenti vanno a terminare nell'estremità dei corni minori del muscolo cutaneo e della mandibola inferiore.

La denominazione di ottici minori, che attribuisco a questi nervi, e che può a taluno sembrar troppo arbitraria e fors'anche affatto inconveniente, fu da me desunta non dalle proprietà dei nervi medesimi, ma dalle affinità soltanto, che questi hanno con i nervi dei corni maggiori, i quali vengono comunemente chiamati ottici. Questi furono così denominati, dappoichè il celebre *Swammerdamio* ha saputo col mezzo di lenti acutissime ritrovare in quel punto nereggiante, che trapela nell'estremità di questi, organi inservienti alla vista, vale a dire l'uvea, i tre umori, e la lente cristallina compresa dalla sua membrana. Io non negherò questa mirabile struttura, la quale non farà per altro facile a confermarli; ma dirò soltanto, che le mie osservazioni m'hanno indotto

a credere, che, se v'è in questi corni l'organo della vista, v'è ancora certamente quello del tatto, anzi questo tanto più sensibile di quello, quanto che l'organo del tatto è manifestissimo, e quello della vista tanto debile e confuso, che lascia luogo a dubitarne moltissimo. Molte furono l'esperienze da me fatte per pur vedere, s'io poteva trarmi dal capo questa dubbiezza, ma tutt'insieme altro non fecero che confermarmela maggiormente. Quando le corna erano ben allungate e distese, e che i punti nereggianti trapelavano ad evidenza, io vi approssimai varj corpi di vario genere e colore, ma questi non mi diedero quasi mai indizio di certa e distinta visione, poichè di rado ho potuto osservare, che le lumache per questi corpi, che stavano quasi a contatto dei loro corni maggiori, o deviassero dal lor cammino, o ritirassero le corna, o almeno le inflettevano per ischivare i corpi medesimi. E ciò, che accrebbe ancora la mia dubbiezza, si fu, che neppure alla viva luce d'un'accesa candeletta, o al raccolto vivissimo fuoco d'una lente non potei mai ottenere, che le corna maggiori cambiassero della lor natural direzione, se non allora quando il troppo intenso calore le obbligava a ritirarsi. E sebbene, replico ancora, mi sia talvolta avvenuto, che nell'approssimar loro un qualche corpo lucente oppure opaco, abbiano dato un qualche indizio della loro visione, le replicate ulteriori esperienze sono state così a questo contrarie, che m'hanno o confermati i dubbj miei, o almeno fatto toccar con mano, che, se veggono questi rettili, la loro vista è debile fuor di modo e confusa. Quanto però sembrano essere difettosi in questo, altrettanto al tatto sono sensibilissimi. Quindi è che, qualora si strascicano naturalmente, li veggiamo portare innanzi e ben distese le corna maggiori, acciocchè da queste a qualunque leggierissimo tocco possano essere avvertiti, come i ciechi dal lor bastone, a deviare nel lor cammino dall'obice, che riscontrano. Basta veder le lumache, allora che vanno, per accertarsi di questo. Muovonsi esse per modo, che sembrano andar tentone, e quasi brancolando, nè certo si arrestano per qualunque corpo loro si ponga dinanzi, ma allora soltanto, e come sorprese, qualora in esso s'incontrano, ed urtano con le corna, che subito ritirano; poscia allungandole di nuovo sembrano

toccando, e ritoccando ritentare con esse, e quasi sospese l'intoppo medesimo, e prendendo dal lor tatto come norma alla lor direzione, o deviare dal lor cammino se l'obice è forte, o se leggero continuarlo. La qual cosa se è di fatto, come apparisce, sembra ragionevole l'inferire, che le lumache non abbiano occhi, o se pure gli hanno, la natura non potendo altrimenti gli abbia di parti minutissime, e quasi impercettibili composti, onde possano esse, non già con distinzione e chiaramente, ma debolmente ed in confuso vedere gli oggetti; sostituendo poi alla minutezza di questi l'esquisitezza del tatto, onde conoscere distintamente gli oggetti medesimi. Quindi facile riesce l'intendere a qual uso servir debbano le globosità, che si osservano non solo nelle corna maggiori, ma nelle minori ancora, vale a dire perchè la superficie si faccia maggiore, e così i punti dei contatti si moltiplichino, onde maggiore si renda in beneficio e difesa delle lumache la squisitezza del tatto medesimo. Ma questa non è che una semplicissima congettura da me a voi, che sentite tant'oltre in queste materie, per particolar mio lume e richiaramento proposta.

Ritornando alla organizzazione del cervello, abbiamo veduto, che le gambe di questo compongono il ganglio, come la protuberanza anulare è composta dalle gambe del cervelletto umano. Da questo ganglio si diramano molti nervi, altri de' quali vanno anteriormente, altri lateralmente, posteriormente altri, ed altri infine inferiormente; diremo ora soltanto di quelli, che scorrono anteriormente al capo, siccome quelli che riguardano particolarmente il nostro argomento. Dalla parte anteriore di mezzo si produce un nervo, che va con retta linea a piantarsi nella parte inferiore e posteriore del globo ovale. Dai lati escono due fascetti di nervi, uno per ciascun lato, che si spiegano per il muscolo cutaneo in più diramazioni, alcune delle quali scorrono fino alle radici de' corni maggiori, e nella destra parte s'inferiscono ancora nel prepuzio e nella vagina. Delle molteplici poi diramazioni dei nervi inferiori alcuni scorrono anteriormente, e vanno a perdersi nell'estremità anteriore del piede.

Restano finalmente i muscoli del capo, che sono il retrattore del globo ovale, i due retrattori dei corni maggiori,

due dei corni minori, due mandibulari, che tutti vengono dai muscoli, che si partono dalla colonna spirale. Il retrattore del globo ovale, che è il maggiore di tutti, va ad inserirsi nella parte inferiore e posteriore del globo accennato. I retrattori dei corni maggiori si tingono anteriormente di color fosco oscuro, e terminano in un corpiccino solidetto, oblungo, schiacciato e cavo, che finisce verso l'estremità dei corni maggiori. I retrattori minori passano ai lati del cervello, a cui sono aderenti mercè gli ottici minori, indi verso l'estremità si dividono in due, il minore dei quali passa all'estremità delle corna minori, il maggiore si distribuisce nel sottoposto muscolo della pelle. I mandibulari ascendendo in più fascetti di fibre divisi e distinti, inclinati a vicenda l'un contro l'altro vanno ad unire sino all'apice della mandibola inferiore nel muscolo cutaneo parimenti distribuiti. Oltre questi, altri ve ne sono ancora, che sebbene tenui ed a guisa di filamenti, pure sono eleganti assai, e meritano d'essere ricordati, e distinti. Questi, ch'io chiamerò col nome di briglie, si veggono superiormente, e nella parte inferiore del globo ovale. Le briglie superiori (*a*) sono semplici, le inferiori sono triplici. Le superiori sono ai lati del globo ovale in vicinanza dei dutti salivali, e terminano nei labbri superiori. Le briglie inferiori si dividono in maggiori, minori, e minime, ovvero lunghe, brevi, e brevissime. Le lunghe (*b*) nascono sotto il globo ovale nel luogo, ove s'inserisce il muscolo retrattore, e vanno a terminare al lato interno delle corna minori. Le brevi (*c*) cominciano un poco più avanti delle più lunghe quasi nel mezzo del globo ovale, indi divergendo, e decussandosi con le lunghe, vanno a terminare nel lato esterno delle corna medesime. Le minime o brevissime (*d*) hanno origine avanti le brevi, e terminano quasi rettamente nell'estremità del muscolo cutaneo sottoposto alla mandibola inferiore. Qualora si contraggono, queste bri-

Zzz iij

(*a*) Tav. I. let. *c*.

(*b*) Tav. II. let. *ee*.

(*c*) Tav. II. let. *f*.

(*d*) Tav. II. let. *g*.

glie ritirano i labbri , e portano innanzi il globo ovale ; la qual azione è di tanta importanza , che difficilmente si spiegherebbe , come senza di queste briglie si potessero le mandibole portar tanto avanti , che il dente talvolta si spingesse a livello dei labbri , e quasi oltre ancora , come non di rado avvenire si vede , qualora le lumache prendono cibo , e massime allorchè tentano di afferrare col dente un qualche incomodo briciolino .

Ora che abbiamo detto quale sia la mirabile struttura del capo delle lumache , passerò a descrivervi il risultato delle mie ultime osservazioni , giacchè queste istesse furono da me fatte sino dal 1772 e 1773 con quelle conseguenze medesime , che voi prima d' ogn' altro avevate nel vostro *Prodromo sopra le riproduzioni animali* accuratamente descritte . Queste esperienze furono da me fatte su di quelle lumache , che dal celebre *Linneo* furono chiamate *Helices* , *Pomatiae* , *Italae* , *Lusitanicae* , *Zonariae* , *arbusorum* , *nemorales* , *lucorum* , *griseae* ecc. Il primo di Maggio del 1782 recisi le corna maggiori a ventiquattro di quelle lumache , che voi mi faceste tenere da Reggio , a tante altre recisi le maggiori e le minori , ad un egual numero l' estremità della coda , a ventiquattro pure recisi il capo , e per fine a tante altre un lembo laterale del piede di più di due linee in larghezza , e di dieci circa in lunghezza , e queste varie recisioni furono nel giorno medesimo da me ripetute in altrettante lumache parmigiane , che erano delle spezie medesime delle reggiane . Le prime lumache furono da me segnate con lettera *A* , le seconde col *B* , e così le altre tutte distintamente , ed indi in varj canestri egualmente distinti riposte , e custodite . Con taglienti forbicette recisi le corna , allora che erano interamente uscite dal capo , ad alcune alle radici , ad altre per metà . Il capo poi , la coda , ed il piede con affilato coltello , allora che si strascicavano bene sporte fuori del guscio sopra d' un piano eguale e resistente , e ciò per essere più sicuro del taglio , e per ischivare quegl' inconvenienti , che di frequente avvengono , qualora di forbici servir ci vogliamo nell' ampu-

tazione di queste parti e particolarmente del capo (a). Il luogo dell' amputazione di questo fu allo incirca una linea e mezza al di dietro delle corna maggiori.

Quello, che mi è avvenuto di osservare nella recisione di queste parti, eccovelo brevemente. Dalle corna, e dalle maggiori particolarmente, ho sempre veduto escire un umore ceruleo, che bagna d' ordinario il tagliente metallo. E' facile il veder quest' umore, qualora sott' acqua si recidono le corna, e facilissimo poi, se l' acqua medesima sia dai vivi raggi del sole penetrata. Non solo si scorge allora, che l' umore, che esce, è ceruleo, cioè il sangue, che scorre per i canali di questi rettili, ma si conosce ancora la forza, con cui esce, e da lungi zampilla, e la quantità; essendomi non di rado avvenuto di vederlo continuato per più e più minuti secondi, e soffermato di vederlo per la ferita medesima ad escire di nuovo con forza e quantità maggiore. Alla qual cosa se si aggiunga, che talvolta le corna veggonsi floscide, appassite e cadenti sopra i labbri, qualora siano state recise alle estremità, e l' impotenza di poterli più oltre intumidire, e distendere naturalmente, sembra che non fosse per essere di gran lunga lontano dal vero chi pensasse, che a questo solo umore si dovesse l' arrovesciamento esteriore e distendimento delle corna, giacchè in tutta l' interna organizzazione, per quanto io m' abbia potuto cercare, non mi è mai riuscito di vedere nè muscolo nè tendine nè troclea, che potesse essere a quest' officio inserviente. Questo umore medesimo ed in quantità maggiore esce egualmente all' amputazione del capo, meno poi nella recisione del piede e della coda, e frammischiato ad un umore tenace e vischioso. Le corna recise subito dopo l' amputazione o non danno più segno di vita, o tenue assai e brevissimo. Non però così le teste, mentre dopo tre, quattro, e talvolta sei e sette minuti ed anche più, irritando le loro corna, mostrano apertamente che conservano ancora una sensibilità non equivoca. Recisa appena la testa si contraggono tosto, e si ritirano nel proprio guscio; alcune pe-

(a) Questa lodevole precauzione è senza *Plateretti* nella Scelta di Opuscoli, ricordata ancora dal Sig. Dottore *Vin-* che si pubblicano dottamente in Milano.

rò di queste poco appresso compariscon di nuovo, mostrando appena nel luogo dell' amputazione già contratto un bianco e ben ristretto segno nel centro, e veggonfi indi strascicar come prima e così vispe, come se il capo loro reciso non fosse.

Questa facilità di moto e questa vivezza nelle lumache decapitate potrebbe facilmente indurre taluno a credere, che le teste non fossero loro recise a dovere, e questa credenza presso la maggior parte potrebbe ancora facilmente prenderfi in luogo d' indubitata certezza. Tutto questo però trovasi intieramente dissipato, e tolto dalla più scrupolosa notomia: mentre nelle teste recise veggonfi oltre le quattro corna le mandibole, i denti, la lingua con le sue appendici, i nervi tutti, i muscoli, le briglie: oltre l' estremità dell' esofago, dei dutti salivari, del prepuzio, e della vagina per modo, che non rimane alcun dubbio che il capo non sia stato intieramente reciso.

Le lumache, delle quali fino a qui parlato abbiamo, e particolarmente le decapitate, e quelle ancora, che dopo la decapitazione si strascicavano, contraendosi tutte si ritirano nella propria portatile abitazione, ed ivi tutto che senza capo si ritirano, rifacendo all' ingrosso quel bianco tenace coperchio, che è un prodotto del vischioso umore, che gemono, mercè del quale soglionfi dalle esterne ingiurie naturalmente difendere. Questa situazione però quanto è comoda per loro e vantaggiosa, altrettanto viene ad essere incomoda all' osservatore, che vorrebbe vederle di tratto in tratto uscire per esaminarne con diligenza i risultati. Per ottener ciò, ho procurato, per quanto mi fu mai possibile, di non aggiungere all' ampia piaga e profonda, che hanno, ulterior stimolo, come quello di rompere posteriormente il guscio, e talvolta ancora, se ad uscire sono ritrose, di punzecchiarle, il che se non venga fatto da mano maestra ed a simili esperienze avvezza, avviene di frequente che quelle appunto, che furono così stimulate, infelicamente sen muojano. Per ottener dunque l' intento e senza nocumento alcuno, io procurai d' invitarvele, e farle uscire spontaneamente, come in fatto mi avvenne, o col riporle nell' acqua tepida, oppure coll' esporle alle dolci piogge di primavera e d' estate, nelle quali sogliono naturalmente all' aria aperta prodursi.

Tenendo

Tenendo adunque questo metodo , nulla mi è avvenuto di osservare di nuovo dopo dieci, quindici, ed anche venti giorni , e soltanto il più delle volte dopo un mese osservai in quelle, che avevano interamente recise , o dimezzate le corna maggiori , al luogo dell' amputazione alzarfi un picciolo globo , il quale in progresso di tempo facendosi maggiore , mostrava nel centro un punto nereggiante , il quale corrispondeva perfettamente a quello, che si osserva naturalmente nell' estremità delle corna maggiori ; quindi allungandosi in seguito , a capo di due mesi, e più frequentemente di tre , ho veduto rifatte le corna maggiori e le minori ancora .

Queste corna rifatte non hanno da principio il loro color naturale , ma sono d'un bianco pallido , ed hanno la cute molto più delicata di quella del capo medesimo ; in progresso però riacquistano il lor colore primiero , e formano un tutto eguale per modo , che riesce difficilissimo anzi impossibile il distinguerle da quelle lumache , a cui le corna recise non furono . Che queste corna rifatte corrispondano interamente alle prime , ce lo mostra ad evidenza la notomia : e queste pure si distendono , si riconcentrano , e sono dotate della sensibilità medesima delle prime .

Come le corna , così si riproducono ancora e la coda ed il piede ; anzi ho osservato particolarmente , che queste si riproducono con continuazione eguale di sostanza , e si perfezionano con maggiore brevità di tempo , che le corna medesime ; e queste parti rinnovate sono esse pure di un bianco pallido , che presto si perde , non rimanendo più vestigio dell' amputazione seguita .

Quello che abbiamo osservato delle corna , della coda , e del piede , lo abbiamo veduto ancora del capo , con questa differenza però , che talvolta nel luogo dell' amputazione dopo un mese o circa questo tempo si vede nel centro spuntare un picciolo globo di frequente irregolare ; talvolta si scorge da un lato , tal altra invece di uno ne compariscono due , cioè uno per ciascun lato , il prodotto dei quali non è sempre corrispondente tra loro : mentre da quello di mezzo ho quasi sempre veduto dopo due , tre , talvolta quattro mesi riprodursi perfettamente la testa , e così dei due laterali congiungendosi insieme , ma dal solo laterale ho quasi sempre ve-

duto seguirne una produzione irregolare, mentre facendosi maggiore, spunta d'ordinario nell'estremità un solo corno, e per lo più il maggiore, il quale allungandosi supera in lunghezza e grossezza le corna naturali, sebben però abbia l'organizzazione medesima delle corna primiere. Parecchie lumache si conservano in questo stato, e ne ho presentemente ancora vive e vegete dopo un anno, che in nulla hanno cambiata questa loro irregolar produzione.

La rinnovazion della testa corrisponde alle parti, che abbiamo di sopra descritte. La cute di questa non è da principio così sagrinata come la naturale, ma più liscia e più eguale, ed è pur essa d'un colore men carico, cenericcio, e così dalla vecchia cute distinto, che sembra con istupore che al vecchio collo sia un nuovo capo applicato, e congiunto. Molti de' miei amici con sorpresa videro queste nuove riproduzioni, e voi pur le vedeste in compagnia dell'erudito e celebre comune nostro amico Sig. Angelo *Mazza*, quando foste nel passato autunno gentilmente a favorirmi. Questa varietà di colore, che si protrae oltre lo spazio di più mesi, si cangia poscia, nè altro vestigio rimane tra la rifatta e vecchia cute se non se un tenue leggiero solco al luogo dell'amputazione, il quale pure col tempo svanisce.

Che le teste rifatte corrispondano interamente alle prime, lo mostra la notomia, poichè in esse ivi si veggono tutte quelle parti, che abbiamo di sopra descritte. E ciò, che accresce ancora nel rinnovamento di queste parti la meraviglia, si è, che, se non vi fosse quella distinzione di colore tra la cute del collo e quella del capo, tutte le parti interne così sono fra loro continuate, eguali, e corrispondenti per il colore, sostanza, e simmetria, che impossibile assolutamente sarebbe il distinguere le riprodotte da quelle, che mutilate non furono.

Appena rifatte le teste cercano tosto le lumache di riparare il lungo forzato digiuno, e fanno uso delle rifatte lor parti in quella maniera medesima, che il facevano da principio. Erano li primi d'Ottobre dell'anno passato, allora quando col beneficio d'una tenuissima pioggia flava io riguardando questi rettili, che tutti usciti dal guscio facevano di sè vaga mostra all'osservatore. Era in mia compagnia uno

di quegli uomini, che per natura loro sono portati a credere poco, e niente poi di quello che sente del meraviglioso. Egli dunque non solo dovette confessare, dal confronto di altre naturali lumache, che quelle avevano una testa riprodotta, tutto che fosse a questo contrario; ma osservò meco una di queste, la quale volta la sua rinnovata testa all'insù stava affaticandosi per afferrare coll' avanzato dente una briciola di crusca, che al suo guscio era in parte attaccata ed in luogo incomodo ancora costituita; ed in que' suoi rinnovati sforzi quanto mai fu piacevole l'osservare le replicate azioni e reazioni dell' aperta bocca, dei molli labbri, della lingua e del dente, che in mille modi volteggiando quel briciolino, tanto fece, che infine gli riuscì di staccarlo, e di farcene un ben ghiotto ed assaporito boccone.

Questo mirabile rinnovamento del capo non avviene però in tutte le lumache, e molto meno in quelle maggiori, che corrispondono in grandezza ai martinacci di Firenze, nè d'ordinario in quelle piccole, che diconsi giardiniere, e veggiamo particolarmente negli orti a varj graziosi colori segnate e distinte. Quelle, che da me furono con prospero evento cimentate, sono l' *Helix Pomatia*, *Itala*, *Zonaria*, *nemoralis*, *lucorum*. Di trecento però e più di queste lumache da me in varj tempi decapitate, altre si conservano tuttora, quali senza riproduzione alcuna, e quali con produzione imperfetta ed irregolare, ed altre infine risecero perfettamente la testa. Di quelle che morirono, furono in massima parte quelle da me segnate particolarmente, alle quali o l' amputazione non era seguita a dovere, oppur quelle che furono decapitate quasi quattro linee dietro le corna maggiori, e per conseguenza quelle, alle quali oltre il capo aveva reciso porzione dell' annesso maschile, dell' appendice dell' utero, e dell' utero medesimo. Quelle poi, che conservanti senza riproduzione alcuna oppure imperfetta, tali si veggono ancora, forse perchè essendo di età troppo avanzata, mancano le di loro fibre della necessaria mollezza, flessibilità e vigoria, e però troppo rigide non possono stendersi, e conformarsi a dovere, onde riprodurre perfettamente le parti amputate.

Gli accidenti tutti, che ho fin qui notati, furono da me quasi per egual maniera riscontrati tanto nelle lumache reg-

giane che nelle parmigiane, talchè in questo nulla mi è avvenuto di vedere, che meritasse una particolar considerazione, il che prova, che quando l'esperienze sono esatte, le lumache della medesima spezie danno per tutto i prodotti medesimi.

Ma è ormai tempo, che dia fine a questa lunga lettera, la quale certo avrà sorpassati i limiti della vostra pazienza. Raccogliendo quanto vi ho scritto, voi non vedrete che una conferma di quanto voi avete diligentemente avanzato nel vostro *Prodromo*, cioè che le lumache hanno la proprietà di rifare le parti mutilate, vale dire le corna, il piede, la coda, e la testa. Le osservazioni quando sono esatte, e vengono da un Filosofo, quale voi siete, che in queste materie

Siete maestro di color che fanno,

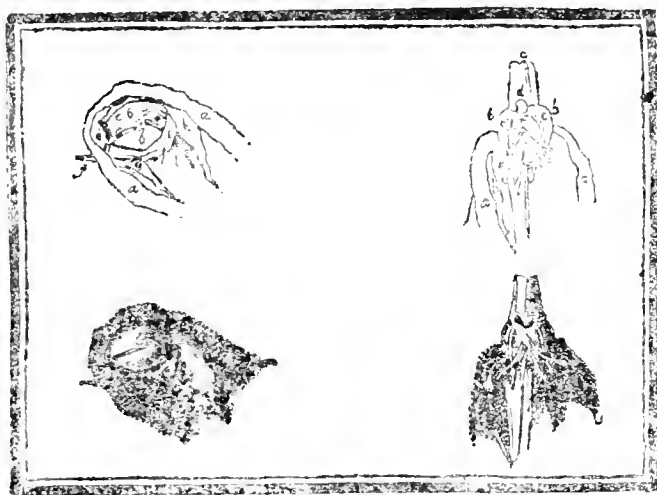
usando delle debite circospezioni, da per tutto e facilmente si devono riscontrare, e si riscontrano verissime. Io vi mando queste osservazioni, non perchè meritino di venire da voi, conosco la loro pochezza, e veggio ciò, che lor converrebbe, ma perchè richieste da voi, e perchè veggiate quanto il compiacervi mi stia a cuore, onde abbiate certo argomento, che nulla più desiderar posso, quanto il farvi conoscere, che sono con particolar stima ed amicizia vostro ecc.

FIGURA I.

- aa* La pelle sagrainata.
- bb* Il globo ovale.
- cc* Le briglie superiori.
- d* La bocca ed i denti.
- ee* L'esofago, ai cui lati si veggono i dutti salivali.
- f* Il corno maggiore.
- g* Il suo muscolo.
- h* L'organo genitale.
- i* Il cervello, e
- l* La gamba sinistra di questo.

FIGURA II.

- aa La pelle.
- bb Il globo ovale rovesciato innanzi.
- cc Il muscolo retrattore del globo medesimo.
- d Globosa appendice della lingua.
- ee Le briglie inferiori lunghe.
- f Le brevi.
- g Le brevissime.
- h Il muscolo del corno maggiore.
- i Il muscolo del corno minore.
- l Il muscolo mandibulare.



ARTICOLO III.

Riflessioni.

Per la numerosa serie dei fatti nel secondo Articolo addotti, avranno di leggieri conosciuto gl' imparziali lettori, che quando io il primo tra Naturalisti annunziai al pubblico nel mio *Prodromo* la rinnovazione del capo nelle lumache decapitate, e quando questa rinnovazione è stata da me amplamen-

A a a iij

te confermata nella prima Memoria, io non ho fatto che render palese al Mondo fisico una incontrastabile verità per lo innanzi non conosciuta: e quindi si faranno facilmente accorti, che hanno avuto il torto gli Autori nel primo Articolo rammemorati, allorchè con le loro esperienze si sono affidati di solidamente combatter le mie. Ciò non pertanto questa medesima verità non può che acquistar forza maggiore, e farsi più convincente, più persuasiva, nell'animo eziandio di quelli che stati sono per l'addietro i meno disposti a riceverla, se rileggendo le tracce delle osservazioni, e sperienze così favorevoli, che contrarie, vorremo accompagnarle da alcuni brevi riflessi, la qual cosa ho io deliberato di fare nel presente Articolo.

Diamo cominciamento dalle favorevoli. Ma ad intelligenza, e a persuasione maggiore di quanto io sono per dire, non sarà disutile di ricordar brevemente al lettore quanto da noi è stato osservato nella prima Memoria intorno alle parti, che compongono l'intera testa delle lumache, e al sito preciso, dove in esse far si dee il taglio, per andar sicuri di averla tutta quanta recisa. Oltre adunque alle quattro corna, quivi si è detto che la loro testa esteriormente considerata risulta de' proprj integumenti fatti a sagrino, di due labbra, e di due mandibole. Se poi dall'esterno passeremo all'interno, la troviam composta d'una picciola lingua, di un dente semilunare di sostanza quasi cornea, impiantato nella mandibola superiore, di una porzione d'esofago, e del cervello diviso in due lobi. Le corna maggiori poi si veggono alla sommità fornite del nereggiante loro occhio, del loro nervo ottico, e de' movitori loro muscoli. Quanto poi al sito dove facendo l'amputazione siam certi di aver troncata l'intera testa, si è mostrato che un tal sito è al di là della radice delle corna maggiori per l'intervallo d'una linea all'incirca, siccome lo fa vedere la notomia. Ciò premesso scendiamo ad esaminar di volo i fatti comprovanti questa riproduzione, dal qual esame apparirà sempre più non solo esser vane e ridevoli le opposizioni di quelli che ricusan di ammettere il rifacimento di qualunque parte del capo, come sono stati d'avviso i Signori *Wartel*, *Cotte*, *Bomare*, *Schröter*, e *Argenville*, ma l'altre eziandio, per cui si argomentano i Signori *Mur-*

ray, *Adanson*, e *Presciani* di poter negare la riparazione dell' intiera testa, quantunque accordino la riparazione di qualche parte.

E per cominciare dal Sig. *Roos* (per seguir l' ordine nel nominar questi Autori che si è tenuto nel secondo Articolo) oltre a due lumache , l' una delle quali avea già rimesse le corna maggiori, e l' altra le quattro corna , e la bocca, ei dice formalmente che una terza lumaca, alla quale era stata tagliata la testa alla radice delle corna , ne avea acquistata una nuova, unitamente alle quattro corna pur nuove. Se adunque in quest' ultima lumaca era stato operato il taglio alla radice delle corna , chi non vede che la testa riprodotta doveva già esser munita, tra l' altre appartenenze, se non d' un nuovo cervello, d' una porzione almeno di esofago , delle labbra , del dente , delle mandibole , della lingua?

Ma le lumache del Sig. *Lavoisier*, una delle quali con la nuova testa somigliantissima alla vecchia fece egli vedere alla Reale Accademia di Parigi , oltre al rifacimento delle mentovate parti, dovevano avere rigenerato il cervello, per averne fatta l' amputazione al di là delle quattro corna . E la saggia maniera , con cui questo celeberrimo Accademico descrive i principj, e gli avanzamenti di tale riproduzione , e l' autorevolissima testimonianza di così illustre e rispettabile Ceto conciliano pienissima fede alla narrazione de' suoi tentativi.

Non meno decisive sul rifacimento dell' intiera testa , e non meno giudiziose sono l' esperienze registrate negli Atti della prelodata Accademia , che furono istituite da' Signori *Turgot* , *Tenon* , ed *Herissant* . Quivi espressamente si avverte che ad alcune delle lumache mutilate fu interamente troncata la testa , e si passa in seguito a descrivere il nascimento , ossia lo sviluppo di una testa novella, la quale arrivata al convenevole ingrandimento lascia vedere tra le altre parti il riprodotta dente semilunare.

Con le esperienze di questi Accademici di Parigi consuevano mirabilmente quelle del *Müller*. E quando io nomino il *Müller*, intendo di ragionare di uno de' primi Naturalisti della Germania. E quella diligenza, sagacità, e oculatezza , che oltre al raro suo sapere caratterizza le rinnomate sue Opere, si

distingue altresì nella sensata sua Memoria su le lumache. E di quanto io dico facilmente converranno i lettori da que' saggi avvertimenti, che precedono la citata Memoria, l' uno de' quali si è, che per accertarsi il Tedesco Naturalista di avere decapitate a dovere le sue lumache, dopo l' amputazione esaminò ad occhio nudo, e alla lente la testa già spiccata dall' animale, e vi osservò, e vi fece osservare a più intelligenti le parti principali che la compongono, come le quattro corna, gli occhi, la bocca, le labbra, le mascelle, ecc. Quantunque poi diverse di queste lumache non riproducessero, o riproducessero male, altre però riprodusser benissimo, rifabbricando compiutamente quelle parti stesse, che avevan perdute, il che basta all' intento.

Si è pur veduto che alla presenza di molti Professori di Medicina, e di Fisica è stata fatta l' amputazione non poco al di là delle corna maggiori dal Padre *Scavella*, celebre Matematico, e dotto Fisico, la cui morte da alcuni anni seguita non lascia Brescia di piangere, di cui era uno de' principali ornamenti: e che l' operazione per mezzo di due nuove e taglientissime forbici si faceva prestamente, e in un colpo solo non dando così tempo alle lumache di ritirarsi. Non ostante però la piena sicurezza di aver troncata la testa, e di averla per intiero troncata, per esserli fatto il taglio molto al di là delle corna maggiori, si è questa rifabbricata, in quali più, e in quali meno; e tra queste una lumaca l' aveva così compiutamente rifatta, che a riserva del colore, e della mollezza, non era distinguibile la testa nuova dalla vecchia. E una simile compiuta riproduzione si ebbe altresì da una lumaca decapitata dal valente Anatomico, e Fisiologo, Sig. Dottore *Pusini*, che fu pur veduta, e ammirata dal mentovato chiarissimo Padre.

Il Sig. *Schaeffer* di Ratisbona, il cui solo nome presso i Naturalisti vale per il più splendido elogio, non avvisa nella lettera a me scritta, nè tampoco nel picciolo estratto che la accompagna, dove abbia precisamente fatto il taglio alle sue lumache. Per saper ciò bisognerebbe consultare le sue Dissertazioni in tedesco relative a tale soggetto, le quali io non ho vedute. Ciò non pertanto l' avermi egli formalmente detto, che *le sue sperienze e osservazioni hanno verificato pienamente*

mente le mie, e il saperli che tali osservazioni, e sperienze partono da un Fisico sì addestrato nella difficil arte di sperimentare, e sì esercitato e sì grande nello studio de' minuti animali, sono presunzioni troppo forti per credere ch' egli abbia veramente recisa quella parte anteriore di corpo, che costituisce l'intera testa, e che quindi ottenuto ne abbia veracemente una novella, non già una porzione, oppure una soprapelle, un invoglio.

Avverte questo illustre Naturalista di avere *fors' anche spinta alcun poco più in là di me la sua curiosità*: e vuole probabilmente alludere a quanto si accenna nell' estratto indicato, cioè che egli *ha veduto costantemente rinascere non solamente le teste, ma le code eziandio, che loro aveva tagliate*. E certamente dal non avere il Sig. Schaeffer avuto altra notizia de' miei tentativi, a quel ch' io mi sappia, che da' pubblici fogli (almen quando sperimentò egli) ne' quali fogli non si facea che annunziare la sola riproduzione del capo, aveva egli tutta la ragione di dir questo. Il vero è però che oltre l' avere io veduto il rifacimento del capo, ho altresì veduto l' altro di quella parte, che alcuni chiamano *coda* , e che è l' estremità posteriore del piede della lumaca; anzi ho io ottenuto il riproducimento di tutto il piede, ossia di quella porzione del corpo, a cui appoggiasi l' animale quando si strascica: e questo in termini formali lo dico alla pag. 70 del *Prodromo*, e lo ripeto poi nella prima Memoria. Godo pertanto di veder anche confermata quest' altra mia osservazione, nè solamente dal Sig. Schaeffer, ma da altro Naturalista non men valente di lui, nè men celebre, quale si è il Sig. Lavoisier, che come si è veduto nel secondo Articolo ha conseguito egli pure il riproducimento della medesima parte.

A diverse delle lumache, di cui ragiona il Sig. Abate Troilo (per passare alle sperienze di questo dotto Fisico) oltre alla testa venne levata qualche porzione di collo. Nè fu punto a stupire se tutte perirono: che anzi fu piuttosto a maravigliare che alcune prima di lasciar di vivere dessero fuori un principio di riproduzione. Per l' opposto non poche di quell' altre, che sotto il tagliente metallo lasciarono l' intera testa, e non più, la rifecero pur intiera: e una delle prove decisive, che gli organi che la compongono si erano rifatti, fu

che queste lumache fecero uso della bocca , e dei denti col prender cibo .

La medesima pruova fu data altresì da una delle lumache decollate dal Sig. *Senebier* , cioè a dire da quell' illustre Ginevrino che ci ha dato un eccellente Trattato intorno all' *Arte dell' osservare* , e che ha poi avvalorato il precetto con l' esempio , arricchendo la Fisica d' ottime produzioni sperimentali , e recentemente di bellissime , e sensatissime Memorie su l' *Influenza della luce solare nel modificar gli esseri dei tre Regni della Natura* . Sebbene il cibarsi di questa lumaca non fu il solo argomento , onde inferì il Sig. *Senebier* che rifatta aveva compiutamente la testa . Lo riconobbe anche a chiarissime note dall' esser ritornato il suo testaceo a quello stato di perfezione , in cui era prima d' essere decollato . Che poi fosse stata veracemente levata la testa così in quella lumaca , che in altre diverse che la restaurarono più o meno , non vi poteva cadere il più picciolo dubbio , per aver egli notomizzate le teste recise , e per aver confrontate le parti che le compongono con la notomia delle lumache datane dall' immortale *Swammerdamio* .

Non era neppure da pensarsi che le sperienze del compatriotta del Sig. *Senebier* , cioè a dire d' un *Bonnet* , le cui Opere pubblicate fanno le delizie , e l' ammirazione del secolo , non fossero convincentissime . Quante cautele non adoperò egli perchè l' operazione del taglio fosse fuori del dardo degli avversarj ! Quanta oculatezza non usò per accertarsi di avere interamente tronca la testa ! Quale assiduità , quale studio , quale diligenza nell' osservare minutamente i fenomeni delle teste riproducentisi ! Con quanta evidenza non dimostra egli il risacimento dell' intiero capo in qualche lumaca ! Con quale imparzialità non ci dice egli che altre hanno riprodotto male , altre non hanno riprodotto di sorta , altre anzi che riprodurre sono perite ! Sebbene queste importanti verità verranno gustate grandemente di più dal lettore , se vorrà consultare le Memorie stesse del nostro Filosofo , conoscendo io troppo bene , che l' estratto per me abbozzato non tramanda di esse che un languidissimo e smorto parelio .

Rimarrebbe ora a parlare delle tre lettere de' Signori *Caldani* , *Pratolongo* , e *Girardi* , che gentilmente si sono com-

piaciuti di favorirmi, e per le quali io debbo professar loro la mia più rispettosa e più viva riconoscenza, facendo vedere come anche da queste lettere rimanga nel più rigoroso modo comprovata la riproduzione di tutta la testa, se non rifletteli che trovandoli esse nella presente Memoria pubblicate come mi sono state trasmesse da' loro chiarissimi Autori, i conoscitori leggendole per intiero ne comprenderanno meglio la forza, e ne rimarranno quindi più persuasi, e convinti. Piuttosto io mi tratterrò per poco sopra alcuni luoghi di queste lettere concernenti certi fatti, che per la presente materia non farà che bene di mettere in chiaro.

Il Sig. Professore *Caldani* sul finir della lettera tocca due leggieri divarj tra la testa nuova e la vecchia. Il primo è che le rispondenti corna novelle non sono talvolta eguali fra loro in lunghezza, e in grossezza.

Cotal fenomeno ho io altresì qualche volta osservato, ed entra nel novero di quelle diverse anomalie o mostrosità da me divisate in più luoghi di questo scritto, e che di nuovo mi converrà di toccare più sotto.

L' altro divario riguarda la mancanza di quel sagrino su la pelle della testa novella, il quale si osserva sempre su la pelle della testa vecchia. La stessa cosa è pure stata notata dal Sig. *Latvoisier* (a). Quest' ultima differenza però non è di durata, siccome lo è talvolta la disuguaglianza delle corna; ma da lunga esperienza ho potuto conoscere, che a poco a poco svanisce, e da ultimo si fa nulla. Vo dunque dire che se le lumache, che hanno rifatto il capo, seguiranno a vivere per più mesi, insensibilmente la pelle perde quel liscio, e quel fino che aveva, e tutta vestesi del suo sagrino, da prima non visibile che alla lente, ma visibilissimo in seguito all' occhio nudo. Così il nuovo, considerato anche esternamente, rendesi in fine similissimo al vecchio (in molti individui almeno) senza eccettuarne il colore, il quale di bianchiccio o cenerognolo che era nella nascente riproduzione, diventa oscuro allorchè questa si è pienamente perfezionata.

Bbbb ij

(a) Art. II.

La serie di queste fasi, di questi cangiamenti nell'esterno de' nostri rettili mutilati, da me avvertita così nel *Prodromo*, che nella prima Memoria, io la veggio pur confermata dalla Reale Accademia di Parigi, e dalla lettera dell'Anatomico di Parma.

Il celebre Sig. *Caldani* prima di terminar la sua lettera dice, che delle lumache da lui decollate non gliene restavano più in vita che quattro li 27 Settembre 1782. Ora è opportuno a sapersi, che di quelle quattro una rifece benissimo il capo. Così egli mi significa con sua lettera de' 19 Aprile 1783. "Delle quattro lumache che mi rimasero, nel passato freddo me ne morirono tre. La quarta, che era la più grande di tutte, mi mostrò, quattro giorni sono, una bellissima testa".

Nel *Prodromo* favellando io delle anomalie, che non infrequentemente si scorgono ne' capi rigenerati, e che sono state poi confermate dalla più parte di quelli che parlano con esito felice di queste riproduzioni, cerco quale esser possa la cagion fisica di così fatte anomalie. Ed avendo io allora qualche sospetto ch'essa provenisse dal taglio più o meno avanzato, più o meno obbliquo, accenno questa cagione, senza però ammetterla, nè rigettarla. Tali sospetti per ulteriori tentativi essendo in me cresciuti, mi hanno poi indotto a dire con maggiore animo, o almeno con minor timore nella prima Memoria, che l'obblività del taglio, o il maggiore o minore avanzamento di questo influisce forse nel produrre somiglianti mostrosità.

La diligenza, e la sagacità del Sig. *Pratolongo* si è esercitata intorno a questa curiosa ricerca, come apparisce da alcune esperienze riferite nella sua lettera, le quali non combinano troppo co' miei sospetti. Confessa però essere troppo poche per decidere; e quindi sospendendo egli il suo giudizio, rimette la ricerca a una serie novella di esperienze, di cui non racconta l'esito, per non avere ancor riprodotto le lumache mutilate quando scrisse la lettera. Nè io in seguito ho saputo quali sieno stati i risultati di queste nuove esperienze. Mi convien però dire che nella suddetta mia Memoria, stampata assai prima ch'io ricevessi la sua lettera, oltre al sospettare che l'accennata condizione del taglio concorrer potesse al

producimento di quelle mostrosità , perchè molti e replicati fatti me lo facevano credere , io adduco un' altra cagione , che mi è paruta ella pure produrre talvolta il medesimo effetto; voglio dire se per fare l'operazione ci serviamo d'uno stromento , che, per non essere affilato come conviene , recida male nè ad un colpo solo la testa ,

Il Sig. *Girardi* dopo me osserva , che nel momento che si taglia un corno alla lumaca , segnatamente uno de' maggiori , schizza un picciolo zampillo di umore ceruleo . Egli ed io spieghiamo il fenomeno , ma discordiamo nella spiegazione . Io opino che un tal umore covi prima ne' corpi glandolosi delle corna rotti allora dalle forbici o dal coltello (*Mem. cit.*) . Egli vuol per l'opposito , che sia il sangue dell' animale o un fluido analogo che esca con empito da' suoi vasi nel momento che si tronca il corno . Esaminata meglio la cosa , a me sembra ch' egli abbia ragione , ed io il torto . Che dentro di fatti alle corna maggiori scorra un vaso insigne inoltrantesi anche per qualche tratto sul capo , e ripieno di quell' umore leggermente ceruleo , ella è cosa da non mettersi in dubbio . Ma è pure egualmente certo , che recise le corna , quel vaso appassisce , e quasi dileguasi , per esserne uscito l' umore , che in grazia del colore ceruleo lo rendeva visibile .

Prima di uscire di queste lettere mi rimane a parlar d' una cosa , che ha qualche rapporto con le riproduzioni , temendo io che l' ometterla non potesse creare qualche confusione nell' animo de' miei lettori . Il sommo Naturalista *Swammerdamio* ci ha lasciata un' eccellente descrizione anatomica dei nervi delle lumache , tanto di quelli che dal cervello si diramano dentro del corpo , quanto degli altri che si propagano al capo . Io cotesti nervi ne' miei esami su le lumache ve gli ho trovati appuntino , e mi si è aperta l' occasione di parlarne così nel *Prodromo* , che nella mia prima Memoria . Ma il Sig. Dottore *Girardi* nella citata sua lettera ha spinto più in là dell' Olandese Anatomico le sue ricerche , col darci una storia dei nervi , segnatamente di quei della testa , più circostanziata , e più ampla . Quivi ognuno può scorgere quanto brilla la sua sagacità , la sua industria . I nervi adunque , che in sì gran numero si rinnovano nelle teste rifatte , rendono sempre più maravigliose coteste riproduzioni . Ma se la pre-

senza de' nervi nei nostri rettili è una verità di fatto , una verità palpabile , come dunque sussiste ciò che ha scritto ultimamente un chiarissimo Autore , il qual nega assolutamente che le lumache abbian nervi , anzi vuole che ne sian privi i testacei tutti ? Così egli c' insegna in un suo libro di Nomenclatura, intitolato: *Introductio ad Historiam Naturalem sistens Genera Lapidum, Plantarum, & Animalium* ecc. (Pragæ 1777); nel qual libro favellando dei testacei ha queste formali parole , *nullis nervis instructa* . Quelli adunque che si abbatteffero a leggere la mia Memoria , e l' indicata Nomenclatura , si troverebbero in qualche confusione , perchè posti fra due contrarie autorità , l' una che ammette i nervi nelle lumache , l' altra che affatto gli esclude . Vero è che la seconda non fa che negarli; tuttavia sì fatta negazione pareva non dovessè trascurarsi , per venire da un Uomo che ha celebrità , e che per le molte sue cognizioni sinceramente io stimo . Qui adunque per levar d' imbarazzo i miei lettori , e dirò anche me stesso , non vidi miglior partito , che il consultare l' Autor medesimo , dal quale intesi con inesplabile mio stupore , non solamente ch' egli non aveva mai fatto osservazioni su l' interno delle lumache , ma che neppure avea letto lo *Swammerdamio* ; e che intanto negava i nervi , in quanto che dal Principe dei Nomenclatori riponendosi le lumache fra i vermi , a lui era paruto che non fossero degne di averli .

Termino di favellare delle sperienze del Sig. *Girardi* col riferirne una sua recentissima . Nel mese di Novembre del prossimo scaduto anno 1783 , essendo io passato per Parma , ed avendo quivi avuto il piacere di riabbracciare in sua casa questo mio pregiatissimo Amico , egli mi fece osservare alcune lumache tuttora viventi , ma chiuse ne' loro nicchj , da lui mutilate in guisa la scorsa primavera , che la sezione oltrepassati avea di molto i confini del capo . Essendo io in seguito stato voglioso di saperne l' esito , lo pregai sul finire del suddetto anno a volermelo partecipare ; ed egli si compiacque di farlo col seguente Articolo di lettera che qui trascrivo , parendomi affatto interessante , giacchè da esso raccogliessi , che talvolta i nostri testacei fanno riprodurre , malgrado la mutilazione di una porzione del corpo assai superiore a quella dell' intiera testa .

„ Le lumache da voi vedute furono da me decapitate li
 „ 11 Maggio dell' anno scorso quattro buone linee dietro le
 „ corna maggiori , e nell' esame del capo reciso non solo vi
 „ erano i muscoli , e nervi tutti unitamente al globo ovale ,
 „ ai dutti salivali , al cervello , ecc. , ma dietro a questi tut-
 „ ta la porzion grossa anteriore dell' arnese maschile , e più
 „ della metà dell' appendice dell' utero contenente il propor-
 „ zionato angolare ovarino , per modo che a me sembrava
 „ impossibile che questi rettili potessero novamente riprodur-
 „ re le parti amputate . Ho voluto vedere in questi passati
 „ giorni che fosse avvenuto di queste infelici ; e con mia sor-
 „ presa una di quelle segnate con lettera O , nelle quali il ta-
 „ glio era stato anche un poco più ingordo , l' ho veduta u-
 „ scire , dopo di averla tenuta per lungo tempo stretta in ma-
 „ no , e dopo una lunga immersione nell' acqua tepida , pro-
 „ ducendo innanzi il suo lungo collo , in capo al quale scor-
 „ gevasi manifestamente i principj dei due corni maggiori ,
 „ al di sotto dei quali comparivano i labbri , e la bocca ; es-
 „ sendo la cute che copriva tutta la parte anterior riprodotta
 „ d' un cenerino molto più aperto e chiaro di quello che
 „ si osserva d' ordinario nelle parti novellamente riprodotte .
 „ Dopo di avere per lungo tempo , non senza particolar stu-
 „ pore , esaminata questa lumaca , quasi incredulo ai sensi miei
 „ fui tentato di aprirla , per vedere internamente ancora la
 „ riproduzione delle parti amputate ; ma siccome le esteriori
 „ non erano ancora perfettamente riprodotte , così pensai di
 „ trasportare a tempo più opportuno questa nuova ispezione ,
 „ per appagare con maggior fondamento la mia curiosità .
 „ Quindi con gelosia tutt' ora nel mio Gabinetto , e nel ce-
 „ stino medesimo , ove voi le vedeste , la sto conservando per
 „ vederne in progresso che sarà perfezionata esternamente che
 „ sia „.

Parma li 13 Gennajo 1784.

Esaminati tanto che basta i fatti più principali , e più im-
 portanti dei rammemorati chiarissimi Sperimentatori , per cui
 rimane confermata nella maniera la più irrefragabile la mia
 scoperta , ragion vuole che ora passiamo ad esaminar quelli

per cui si è cercato d'impugnarla, che è ciò che in secondo luogo proposto mi era di fare nel presente Articolo . Nelle mie diverse ricerche Fisiche essendo stato talvolta necessitato a confutare qualche errore degli altri, o a mostrar qualche sbaglio , ho procurato, quando ho potuto, di farlo in modo che nel tempo stesso apparisse come erano nati cotesti errori, cotesti sbagli , e ciò che far dovevansi per non commetterli, trovato avendo un tal metodo opportunissimo per dilucidare sempre più il vero; e di questo metodo cercherò pur di valermi presentemente. Io non so se così adoperando potrò acquistare la grazia de' Signori Contraddittori; tuttavia proponendomi di parlare d'ognuno con la dovuta stima, e rispetto, vorrei lusingarmi almeno che non se ne dovessero offendere , a quel modo che io non sono restato punto offeso, quando hanno cercato d'impugnarmi, e di far apparire che mi era ingannato, non ostante che la ragione militasse a mio favore, ed essi avessero il torto.

Il Sig. *Wartel* che fu il primo, per quanto a me costa, a far note al pubblico le sue sperienze contrarie alle mie, non crede possibile la riproduzione nelle lumache, per non avere ottenuto il risfamento delle corna, nè del capo nelle mutilate da lui fu la fine di Ottobre del 1767, ed esaminate nel mese di Maggio del 1768.

Prego questo saggio Religioso a volermi permettere qualche considerazione su l' accennato tentativo . Quando io ho detto che le lumache terrestri hanno il dono di riparare il capo reciso, io ho parlato di quelle che mi eran cognite, anzi neppur di tutte queste, ma di alcune specie soltanto, quali sono l' *helix lucorum*, la *pomatia*, e la *nemoralis*. Era io dunque ben lontano dal pretendere, che di tal prerogativa godeessero tutte le specie comprese sotto questo genere di rettili sì prodigiosamente moltiplicati sul globo. Il Sig. *Wartel* non divisa punto la qualità di lumache da lui cimentata. Non poteva egli darsi che abbattuto si fosse in alcune di quelle che verosimilmente sono inette al riprodurre? Ed essendo così la cosa, qual maraviglia che gl' individui da lui mutilati sono sempre restati acefali?

Ma conceduto eziandio che le lumache da esso sperimentate fossero attissime al riprodurre, io dubito forte che questo

Naturalista

Naturalista coll' averle decapitate in Ottobre, ed osservate in Maggio, abbia avuta più fretta a negare la nuova testa, che la Natura a rimetterla. La riproduzione negli animali non è in fine che una vera generazione; con questo solo non attendibil divario che nella generazione ordinaria nasce e si sviluppa un tutto organizzato, e nella riproduzione nasce e si sviluppa una parte soltanto di questo tutto. Quelle condizioni adunque che sono richieste al nascimento di un tutto, si richieggono al nascimento di una parte, e tra queste condizioni vi è il calore. Nell' uomo, ne' quadrupedi, e in più altri animali di sangue caldo nascono i feti a qualunque stagione, perchè questi maturano nel corpo della madre, dove trovano sempre un proporzionato calore. Gli uccelli possono altresì far nascere in inverno le loro uova, mediante il calore da esso loro somministrato. Non così accade agli animali di freddo temperamento, i quali non propagano, nè propagar possono la specie, che alla buona stagione; restando nel rimanente dell' anno compresi dal freddo in guisa, che volendo noi giudicare dall' esterne apparenze, li crederemmo più presto morti che vivi. Questo si osserva nella più parte degl' insetti, de' vermi, de' rettili, e tra questi ultimi si debbono noverar le lumache terrestri, le quali non si accoppiano, e non generano che in primavera, e durante tutto il verno si tengon sotterra immobili affatto, e in uno stato letargico, rinchiusse dentro alle calcari lor nicchie, di cui ferrano esattamente l' apertura con quel loro coperchio formato dal vischioso glutine, che geme dal corpo di esse. Di più le medesime in quell' avversa stagione non solo non generano, ma quelle che giunte ancora non sono al necessario ingrandimento, ristanno allora dal crescere, e dallo svilupparsi di vantaggio, che anzi tutte quante sceman di volume, e di peso, come si fa chiaro osservandole quando in autunno si chiudon sotterra, e quando in primavera ne escono. E la ragione di tal decremento è troppo patente, mentre per l' una parte in tutto quel tempo non si cibano punto, e per l' altra la loro traspirazione non rimane affatto impedita. Se questi rettili adunque non generano, se restan letargici, se punto non crescono nell' intiera vernata, che è quanto a dire durante presso a poco tutto quel tempo che sono stati custoditi dal

Sig. *Wartel*, come si poteva egli aspettare la riproduzione del capo? Di fatti non avviso io forse che per ottener questa non vi vuol meno del grado decimo terzo del termometro reaumuriano, e che in conseguenza non ogni stagione a questo organico sviluppo è idonea, ma la state soltanto, e la primavera alquanto inoltrata? (a). Non rendo io forse consapevoli i lettori che, se la decollazione venga fatta all' avvicinarsi del verno, non comincia ad osservarsi un principio di riproduzione, che nel seguente Maggio? (b). E qui si rifletta ch' io parlo della nostra Lombardia; per l' opposto nell' *Artesia* dove il citato Autore ha fatto i suoi tentativi, e dove il freddo è assai maggiore, un tal principio non farassi palese che molto più tardi, come sarebbe in Giugno. Se adunque il Sig. *Wartel* fosse stato meglio istruito del tenore che tien la Natura nella generazione, e nell' accrescimento de' nostri rettili, anzi che decidere in primavera, deferito avrebbe a farlo in estate, quando cioè suol manifestarsi cotesta riproduzione.

Ma dato eziandio che i mesi estivi stati non fossero al riproducimento più favorevoli degl' invernali, aveva egli in virtù di quell' unica sua esperienza bastevol motivo, onde giudicare impossibile cotesto fatto? Non si accorgeva che sì adoperando peccava contro la Logica? In effetto non poteva egli darsi che il buon esito delle sue esperienze venisse impedito da qualche circostanza da lui non preveduta, massime per esser questo il primo saggio ch' egli intraprese su questi animali? Non dice la pagina 66 del mio *Prodromo* che in quelle spezie medesime di lumache, che hanno virtù riproduttrice, ve n' ha alcune che a ciò sono inette? Non poteva egli dunque darsi che il nostro Sperimentatore abbattuto si fosse in queste ultime? Senza che la buona Filosofia non c' insegna ella che a stabilire una scoperta bastano uno o due fatti, purchè sieno bene avverati, nulla provando mille altri che in contrario forger potevano, per essere innumerabili gli accidenti che frappar si possono ad impedire la ricercata verità?

(a) Pref. cit. e Mem. I.

(b) Ivi.

Il Padre *Cotte*, Prete dell' Oratorio , si è esercitato molto più a lungo del Sig. *Wartel* su le lumache . Quest' ultimo dopo il riferito saggio non è più tornato , per quanto io sappia , a queste ricerche . Per l' opposto il primo per cinque anni seguiti , cioè dal 1769 fino al 1773 inclusivamente , ha continuato a sacrificar questi rettili alla Filosofia . Ma a quel modo che egli si è distinto nella molteplicità degli esperimenti , avrei anche voluto che distinto si fosse nella maniera di saggiamente instituirli . Ma se debbo dirla com' io la sento , a me non sembra che in questa parte il chiarissimo Naturalista Francese dato abbia gran prove del suo valore . Veduto abbiamo nell' *Avant-coureur* che appena udite le mie osservazioni , fece egli con affilata forbice saltar per aria tante teste , quante lumache si abbattè di trovare . Lodo assaiissimo la sua premura , il suo zelo nell' affrettarsi di cercar di avverare un fatto in apparenza sì paradossò . Ma non posso mica egualmente lodare il metodo da lui tenuto per conseguirne l' intento . Se qualor la lumaca è fuori del guscio , tutto quel che apparisce del suo corpo , non fosse altro che la testa di lei , era sicuro il Padre *Cotte* di non avventurar colpo di forbice senza far balzare in aria in tutto o in parte la testa . Ma occupando questa soltanto la porzione anteriore del corpo dentro a certi prefissi limiti , era un puro accidente se da qualcuno di que' colpi avventurati così senza legge , senza misura , veniva essa a recidersi precisamente . Un destro ed avveduto sperimentatore , e nel tempo stesso istruito nella Zootomia , farebbe stato men premuroso di fare balzar tante teste , ma più assai di reciderle a dovere , voglio dir col tagliare questa parte e non altra del corpo , mirando a quel sito preciso col tagliente stromento , dove finisce la testa . Nè pago farebbe stato di ciò , ma dopo il colpo avrebbe con attentissima diligenza esaminata la porzione dall' animale recisa , per assicurarli se l' operazione era stata fatta come conveniva . Così hanno adoperato i *Bonnet* , i *Senebier* , i *Caldani* , i *Girardi* , i *Pratolongo* , i *Müller* , e pressochè tutti gli altri che si sono presi la pena di ripetere i miei tentativi : e mi permetterà il degnissimo Padre s' io gli dico che così pure doveva far egli : ed io non dubito punto che in grazia di tali om-

missioni nata ne sia quell' orribile carnificina senza il minimo avventuroso successo.

Ma in mezzo a quella immensità d' inutili tentativi ha egli almeno appreso dalle lumache un' astuzia, atta a deludere le crudeli mire degli sperimentatori, la quale astuzia non è lontano dal credere che m' abbia ingannato. Osserva egli adunque che la lumaca nell' istante che si sente ferire, si ritira precipitosamente dentro la casa: che però non di rado lo sperimentatore può credere di aver recisa la testa, quando non ha portato via che qualche pezzetto di pelle. Quindi gentilmente viene a redarguirmi, quasi che le lumache sieno state più accorte nel ritirare la testa, che io nel reciderla.

Che le lumache, quando sentono la viva azion del coltello o della forbice, faccian l' atto di ritirare il capo, questo è verissimo: ma che poi, adoperando le necessarie cautele, loro riesca di ritirarlo di fatti, questo è falsissimo. Se adunque lo stromento è bene affilato, la lumaca non ha tempo, nè può aver tempo di ricoverare la testa, ma bensì questa si trova già spiccata dal corpo, quando ritirati l' animale dentro del guscio. E chiunque è capacissimo di eseguir bene questa operazione, purchè ad un colpo, e con celerità venga fatta. E di quanto io dico me ne appello a tutti quelli che hanno verificate le mie sperienze, ed a chiunque amasse verificarle di nuovo.

Ma voglio che sian liberali con questo Francese. Voglio che gli accordiamo che qualche volta a cagione o dello stromento poco tagliente, o della poca prestezza della mano nel dare il colpo, o per qualunque altro accidente la lumaca ne resti libera con la sola perdita della pelle del capo. Io qui dimando, quale sarà quel Filico sì inesperto o sì disattento, che all' istante non s' avvegga dello sbaglio commesso? La testa di una lumaca, siccome replicatamente si è detto, non è mica una picciola cosa: ella è una macchinetta organica compostissima; e recisa che sia, oltre alle altre parti che vi discuopre la lente, saltano agli occhi le quattro corna, le labbra, la bocca, i denti, ecc. E come dunque sul momento non accorgerli se la porzione recisa contien queste parti, e in conseguenza se è la verace testa, oppure se non consi-

ste che in quel solo superficiale sagrino , che è la pelle dell' animale?

Ma passiamo a far parola d' un altro de' miei oppositori , senza però uscìr della Francia , anzi di Parigi stesso , rincrescendomi solo che finite di mostrare le inesattezze dell' uno mi si presentano subito quelle dell' altro. Parlo del Sig. *Valmont* di *Bomare* , dimostratore di Storia Naturale , e autore del Dizionario di questa Scienza. Rileggendo quella sua Relazione su la decapitazione delle lumache , vi offervo alcune mancanze , che qui non posso dissimulare . Primieramente si fa chiaro che questo Naturalista , non altrimenti che il Padre *Cotte* , si fece a mutilar le lumache senza curar punto due cose rilevantissime , l' una di marcare il sito dove fece il taglio , l' altra di esaminare la porzione recisa , per assicurarsi se aveva precisamente troncata la testa ; di null' altro istruendoci egli in quel suo racconto , se non che tagliò alle lumache bruscamente la testa , la qual voce *bruscamente* nulla ci dice di ciò che si voleva sapere da lui.

Un' altra ommissione di questo Autore si è quella di non ispecificar la qualità delle sue lumache . Egli nel citato suo Dizionario all' Articolo *Lumaca* ripetendo pressò a poco quanto molti anni prima aveva fatto imprimere nel Giornale di Berna , e che è stato da me trascritto nel primo Articolo di questa Memoria , ci avvisa soltanto che le lumache da lui decapitate erano *terrestri* . E di queste lumache terrestri ne annunera poi nel citato Articolo quindici specie , e tutte quante abitatrici dei contorni di Parigi , ne' quali contorni istituì quel suo saggio . Tra le lumache terrestri essendovi molte specie che non riproducono , chi non vede la poca esattezza dello sperimentatore , tanto meno da scusarsi , quanto che le sue esperienze hanno tutta l' aria di voler essere decisive?

Ed a questa sua decisione poi si riporta talmente , e con essa si tiene tanto sicuro , che mostrasi affatto incredulo a questo genere di riproducimenti . Ad insinuazione dell' illustre *Bonnet* feci imprimere nell' *Avant-coureur* li 30 Ottobre 1769 una mia lettera francese , di cui più sotto dovrò far uso , nella quale additando io la maniera di operare da me tenuta nelle esperienze , facea toccar con mano la verità di quan-

to asserito io aveva nel *Prodromo*. A questa lettera pertanto da quel celebre mio Amico essendo stato rimandato il *Bomare*, egli ebbe a rispondergli nei seguenti termini li 5 Novembre 1775 „ Posso assicurarvi, che tutte le sperienze che so-
 „ no state da me fatte sul proposito delle lumache, io le trovo
 „ contraddittorie a quelle dell' Abbate *Spallanzani*. Vedrete
 „ all' Articolo *Lumaca* del mio Dizionario, ediz. del 1776
 „ quello ch' io dico intorno a questa materia, e di che io
 „ aveva già fatta menzione nel 1768,, (a).

Quello poi che trovasi impresso in quel Dizionario si riduce in sostanza, come ho detto più sopra, al picciolo Articolo da me altrove trascritto.

Sebbene questo erudito Francese non solamente non deferisce punto alle mie esperienze, ma nemmeno alle altrui. Le esperienze del Sig. *Roos*, e *Lavoisier*, e della Reale Accademia di Parigi sono state impresse nel 1768. I Signori *Müller*, e *Schaeffer* hanno pubblicate le loro, il primo nel 1769, il secondo nel 1770. Tutte queste sperienze erano dunque notissime, assai anni prima che il Sig. *Bomare* nel Dizionario di Storia Naturale stampasse le sue. Tali esperienze ei non poteva ignorare, essendo state pubblicate sotto i suoi occhi, cioè a dire in Parigi; a riserva di quelle del *Ratisbonese Schaeffer* stampate in tedesco in Germania, ma che gli dovevano pure esser note, pel trafunto che se n' era fatto in francese, e che corso aveva per le parti più colte di Europa. Malgrado però l' unanime consenso di queste esperienze, che tutte rendono a confermare le mie, egli col non parlar punto di esse dimostra chiaro di non curarle. Quantunque però sì adoperando l' Autore del Dizionario non mi sembri meritevole di molta lode, tuttavia meno lo condannerei, se le sue sperienze potessero in qualche modo pel merito contrapporsi a quelle dei testè citati Naturalisti. Ma qual figura facciano a fronte di esse, lascio che il decida il dotto ed imparzial leggitore:

Pesate le circostanze che accompagnano i tentativi del chiarissimo Sig. *Schröter*, a me sembra che del cattivo esito dei

(a) Questa lettera è impressa nelle Opere del *Bonnet* T. V. Par. I.

medesimi si debba meno accagionare l' Autore, che le lumache. Vero è che in Germania egli è solamente tenuto in conto di prode Nomenclatore, il cui ufficio tanto è diverso da quello del vero Osservatore, quanto la Grammatica differisce dalla Fisica. Vero è non meno che que' suoi tentativi su le lumache furono le prime sperienze che fece in sua vita, sapendosi che prima in un villaggio del Ducato di Weimar, dov' era Pastore, si era occupato di tutt' altro: e pur troppo è notissimo che i primi saggi d'esperienze, che facciamo, non sogliono essere capi d' opera. Tuttavia tenendo dietro al racconto ch' ei fa delle sue esperienze, siamo indotti a pensare che il difetto della riproduzione sia provenuto meno dall' inesattezza di lui, che dalla qualità delle lumache cimentate, in quanto che queste non erano probabilmente di natura atta al riprodurre. Lo argomento da ciò che di moltissime, che mutilò nella coda, niuna ve n' ebbe che riparasse questa parte; quando da lunghissima esperienza ho appreso, non esservi lumaca che non sappia ripararla, quando sono di quelle che hanno facoltà riproduttrice. Egli è adunque troppo naturale l' inferire, che non fossero a parte di tal facoltà le cimentate dal Naturalista Tedesco.

Quell' apologia, che ho cercato di fare al Sig. *Schröter*, avrei voluto farla pel Sig. d' *Argenville*, che egli pure decapitò inutilmente qualche centinajo di lumache. Ma a dir vero non ci trovo luogo; e da quel poco che di questo Naturalista Francese riferisce il Sig. *Murray*, pare ch' ei non possa divider la colpa con le lumache. Dagl' innumerabili miei cimenti su di esse sono stato ammaestrato, che quelle eziandio che non riproducono, non muojono tosto che sono state decapitate, ma seguono a viver più giorni, anzi talune più mesi. In virtù adunque di questo fatto, che è sicurissimo, e che ognuno può verificare da sè, chi non vede che se di alcune centinaja di lumache decollate in un giorno dal Sig. d' *Argenville*, quasi tutte eran perite nell' altro, ciò nacque sicuramente per essere stato più del bisogno crudele con loro, oltrepassando inavvedutamente col taglio i limiti della testa, per cui sappiamo che d'ordinario la maggior parte poco dopo perisce? Qual' altra più naturale conseguenza possiam noi dedurne, volendosi comparar questo suo fatto col mio?

Il poco buon esito dei tentativi del celebre Sig. *Murray* a me pare non possa attribuirsi alle mancanze dagli altri commesse. Le lumache sperimentate da lui furono la *pomatia*, e la *nemoralis*, due spezie che sappiamo esser atte al riprodurre: d'altronde non avendo egli mai nell'amputazione oltrepassato di molto la base delle corna maggiori, si ha fondamento di credere che l'operazione venisse fatta con le dovute maniere. La stagione prossima all'invernale, e poco amica di queste riproduzioni (essendo state da lui incominciate le sperienze li 20 Settembre, e proseguite in Ottobre, e in Novembre) giudicherei piuttosto che concorsa fosse in parte a produrre in esse un succedimento poco felice. E tanto più mi sorprende che questo dotto Professore sperimentasse in quel tempo, quanto che nella sua Memoria cita la mia *Prefazione alla Contemplazione della Natura*, nella qual Prefazione tra gli altri avvertimenti relativi a questa materia io tocco questo, che *non ogni stagione è idonea al riprodurre, ma solamente la primavera assai inoltrata, e la state*.

La non troppa diligenza sua nell'esaminare, e nel custodir le lumache dopo che le avea mutilate, è facile che sia stata un altro ostacolo a quel compiuto riproducimento che egli non ebbe. Decapitò in tutto 12 lumache, due in Settembre, e dieci in Ottobre. Una delle due prime sopravvisse poco all'amputazione, e l'altra riprodusse malamente un corno. Suppone poi che quest'ultima sia probabilmente perita, e perchè? perchè *dix post in eam inquirens, tam profunde se se abdiderat, ut attingi nequiret*. Supplico però di perdono questo riverito mio Collega, s'io gli dico che non vi era niente di più facile che fosse viva questa lumaca, quantunque egli più non arrivasse a toccarla dentro del guscio. E vo' dire che pel lungo digiuno sofferto era verosimilmente dimagrata a segno, che più non occupava che l'ima parte della sua casetta. Questo io l'ho veduto assai volte nelle lumache da me decapitate, molte delle quali riputato avrei già perite, se valuto mi fossi del giudizio del Sig. *Murray*. Ma il fatto è che rompendo più o meno i margini del guscio, verso il fondo di questo io arrivava a vederle, e a toccarle, e se non tutte, in buona parte almeno si scoprivano piene di vita. Se altrettanto avesse fatto il chiarissimo Professor di Gottinga, avrebbe

avrebbe forse trovato lo stesso. Sebbene non gli mancavano altri mezzi per assicurarsi della verità della cosa: e questi erano o d'immerger per poco nell'acqua la sua lumaca, o di spruzzarla semplicemente di tal liquore, ovvero di metterla al sole, giacchè se fosse stata viva, o con l'uno o con l'altro di tali espedienti sarebbe uscita da sè; e per tal guisa quel suo giudizio non sarebbe stato azzardato.

Per rispetto poi all'altre dieci lumache mutilate in Ottobre, dopo l'averci raccontato il Sig. *Murray* che alcune mettevano un principio di riproduzione; finisce col dirci che per un sopraggiunto accidente gli fu conteso di esaminarle più in là.

Lascio decidere al lettore qual conto si possa fare di simili osservazioni. Io però per la stima grande che nutro per questo chiarissimo Professore, sinceramente dirò che più volte meco stesso meravigliato mi sono, come stato sia sì poco diligente, sì poco premuroso pe' suoi tentativi; ed oltracciò come intrapreso ne abbia sì scarso numero, giacchè fuori di quelle due sperienze il rimanente della sua lunga Memoria è quasi tutto un ingegnoso tessuto di cose altrui. Che un Fisioco, a cui succeda di ottenere la tante volte menzionata riproduzione, si contenti di poche esperienze, io non avrei che opporgli; che anzi una sola che s'istituiffe, e si raccontasse da lui, purchè fosse decisiva, potrebbe soddisfare i dotti. Ma ove trattasi di esperienze negative, o che almeno tendono a rivocare in dubbio le affermative, un contraddittore, se è versato nell'esperienze, se è pesato ne' suoi giudizi, se è circospetto e sagace, in una parola se all'abilità per l'esperienze accoppia una sana dialettica, non dovrebbe a mio avviso prodursi al pubblico, e ciò anche con molta ritenutezza, se non se dopo un numero ben grande di tentativi. Molto poi più trattandosi d'un genere di esperienze, come son quelle de' nostri testacei, molti de' quali, decapitati anche bene, periscono, siccome io il primo candidamente ne ho avvertito il pubblico, e il Sig. *Murray* per la lettura che mostra di aver fatta delle mie produzioni non doveva ignorarlo.

Quantunque questo Naturalista in forza de' suoi risultati si dichiari di voler tenere una strada di mezzo tra quelli che negano la riproduzione e gli altri che la affermano, pure

da alcuni riflessi che accompagnano i suoi tentativi , e che mi farò lecito di esaminare , dà egli non oscuramente a vedere pendere più inverso i primi, che inverso i secondi.

Riflette egli adunque primieramente che le notomie di questi rettili fatte dai *Lüter*, e dagli *Swammerdam* non sono una commendatizia troppo favorevole per tali riproducimenti. Imperocchè avendo essi scoperta nel capo di questi animali una moltitudine di parti, e queste artificiosamente tra loro connesse e legate, nasce in noi subito una specie di diffidenza, se recise che sieno una volta, possano veramente generarsi di nuovo.

Rispondo però che questa diffidenza sarebbe tutto al più risvegliata in mente nostra quaranta anni fa, voglio dire allora quando per la prima volta si seppe, che il polipo tagliato a pezzi aveva il dono di riprodursi. Semplicissima essendo la sua struttura, pareva che per ragione di essa ei godesse di tal privilegio, siccome lo godon le piante, per la semplicità dell'organizzazione non dissimili al polipo. Quindi si sarebbe forse dubitato che altri animali più composti di lui riprodur non potessero. Ma coteste dubbietà, coteste diffidenze è da lungo tempo che sono svanite, dopo che si è trovato godere della medesima prerogativa tanti altri viventi del polipo prodigiosamente più composti, come sono molti lombrichi, sì terrestri che acquatici, varie qualità di vermi, ma sopra d'ogni altro la salamandra acquajuola. Detto sia per puro amore di verità, non mai per morder la fama di così dotto letterato. I botanici suoi studj ch'egli professava con sì grande vantaggio della colta gioventù, e con tanto suo onore, non gli hanno lasciato ozio per la Zoologia, nè per le minute notomie, due requisiti ch'io reputo sommamente importanti in chi vuole esercitarsi con lode nelle sperienze de' nostri rettili, alle quali essendosi egli accostato, pare che entrato sia in una provincia per lui pressochè nuova. Quindi io non crederei di offenderlo, se gli dicessi che presa lingua dal suo collega *Wrisberg*, celebre anatomico, e sperimentatore, si facesse notomizzare da lui una salamandra acquajuola; in grazia della qual notomia potrebbe egli apprendere, che le gambe, e la coda di questo animale non la cedono punto per la quantità, e per la diversità delle parti, onde vanno composte, alla testa delle lumache, non ostante che

cotali membra si riproducano perfettamente, e quel che più leva, si riproducano sempre, la qual ultima circostanza è ben lungi a verificarsi del capo delle lumache.

Un altro riflesso che induce lo Svedese Naturalista a mettere in dubbio le mie sperienze è tratto dalla spiegazione ch'ei dà alle riproduzioni da lui osservate. State essendo queste non già complete e perfette, ma più o meno mancanti e mostruose, trova egli facile lo spiegarle, dicendo che non sono probabilmente che un risultato del tessuto cellulare allungato. E tale spiegazione a lui sembra che rendasi più verosimile dal muco, di che abbondano questi animali, il qual muco è forse cagione che senza cibarsi vivano sì a lungo, potendo esso in certa guisa supplire al mancante alimento. Ma questa plausibile spiegazione riterrete egli che difficilmente potrebbe aver luogo, ove vogliasi dire con me, che le parti nuove delle lumache non differiscono essenzialmente dalle vecchie.

Per l'amore ch'io porto al Sig. *Murray*, come a mio dotto Collega, fratello di un mio caro e rispettabile Amico (a), sento non poco rincrescimento nel dovere far risposta a questa sua riflessione, per trovarla piena di cose discordanti dal vero, e poco degne di un sensato Filosofo. Non mi farò qui a mostrare quanto sia poco giusta la sua congettura, che il lungo vivere delle lumache digiune dipender possa dal soprabbondante lor muco; e solamente accennerò di passaggio, che siccome le varie specie di rane, e di rospi, le salamandre, ed altri simili anfibi la durano senza cibarsi niente meno che i nostri testacei, così dovrebbero essi egualmente aver miniera di muco, la qual cosa, come ognun sa, è falsissima. Piuttosto entrerò subito in materia, riflettendo primieramente che la difficoltà di spiegare un fatto non è mai stata pe' buoni Fisici una ragione di diffidare del medesimo fatto. Non evvi Filosofo che ignori le gravi difficoltà che s'incontrano (per non uscire del nostro argomento) volendo noi spiegare d'un modo soddisfacente le riproduzioni de' nervi, e dell'

D d d d ij

(a) Sig. Adolfo *Murray* celebre Professore di Notomia a Upsal.

ossa in alcuni quadrupedi , e uccelli , quella della testa , e della coda ne' lombrichi terrestri , e l'altra delle membra nelle acquatiche salamandre . Eppure tutti coloro che dominati non sono da spirito di partito , o da privato interesse accordano di buon grado la realtà di così fatte riproduzioni , perchè troppo accertate dalla diligenza , e dall' oculatezza de' Naturalisti moderni .

Offervo in secondo luogo che il nostro Autore è entrato nella spiegazion d' un fenomeno , senza prima sapere cosa veramente fosse questo fenomeno . Innanzi di darli a credere che le riproduzioni da lui ottenute , consistenti nelle corna più o meno rigenerate , erano probabilmente un lavoro della cellulare , facea di mestiere l' accertarsi bene della loro qualità , e natura . Non doveva egli dunque acquetarsi a quelle superficiali apparenze di mostrosità , ma da cauto e pesato Naturalista dovuto avrebbe andare più in là , esaminando attentissimamente se la novella porzione delle corna era organizzata come la vecchia , e voglio dire se esternamente era formata di glandolose granella , e internamente munita del suo muscolo , e del suo nervo ; oltracciò s' ella aveva quella sensibilità , quel moto , quell' azione di allungarsi , e accorciarsi che si osservano naturalmente nelle corna di questi animali . Se con queste esatte e necessarie ricerche poco o nulla di ciò riscontrato avesse il Botanico di Gottinga , e se in quella vece trovato avesse una specie di cellulosità , o di tessuto inorganico , allora la sua spiegazione poteva aver qualche luogo : ma non già se le parti novelle fossero state nell' organismo più o meno somiglianti alle vecchie , e molto meno se come loro fossero state animate . E per la lunghissima esperienza che io mi lusingo di avere intorno a questi fatti , penderei di molto più a credere , che a non credere il vero organismo nelle riproduzioni del *Murray* , malgrado quelle esteriori mostrosità .

Ma in terzo luogo dato eziandio che quelle sue riproduzioni state fossero poco meno che inorganiche , era egli questo un bastante motivo di redarguire le mie , per avere io detto di averle trovate organizzate come le vecchie , quali che le mie dovessero prender norma dalle sue ; e ciò per quella singolarissima ragione , che supposto in esse il primiero orga-

nismo, non era questo spiegabile per l'immaginata sua ipotesi del cellulare tessuto? E come non s'accorgeva il chiarissimo Svedese che la sua redarguizione anzi che offender me, offendeva i principj della Logica la più comunale?

Consenta egli di grazia ch'io dica anche una parola delle sue sperienze. In grazia di esse si è egli determinato ad usare una specie di neutralità tra i miei Impugnatori e i miei Favoreggiatori. Queste sperienze gli hanno fatto vedere un principio di riproduzione: dunque non poteva egli essere pienamente del partito de' miei Impugnatori. Ma tal riproduzione non è mai stata perfetta. Dunque non poteva neppure del tutto aderire a' miei Favoreggiatori. Quindi egli dice che ha dovuto dichiararsi neutrale tra i primi e i secondi.

Ma o fortemente io m'inganno, o a me sembra che tutt'altro buon Filosofo, che trovato si fosse nelle circostanze del Sig. *Murray*, ragionato avrebbe diversamente. Questo Filosofo, supponendolo equo e imparziale, non v'ha dubbio che quella fede che prestato avesse alle proprie esperienze per cui vedeva qualche riproduzione, e a quelle de' miei Impugnatori, per cui non ne vedeva nessuna, prestata anche l'avrebbe a quelle de' miei Fautori, in grazia delle quali veniva a provarsi una completa o quasi completa riproduzione. Massime poi se questi ultimi erano per una parte versatissimi nelle sperienze, e per l'altra godevano della confidenza del pubblico, quali sono per appunto un *Lavoisier*, un *Schaeffer*, un *Müller*, e un *Herissant*, citati dal Sig. *Murray*. Ma qual immediata conseguenza da questa diversità di esperienze tratta ne avrebbe il nostro Filosofo se non questa, che dunque talvolta le lumache non riproducono, tale altra riproducono male, e tale altra riproducono bene? Ma tal conseguenza si accorgeva egli subito che si risolveva in quest'altra, che dunque le lumache hanno la facoltà di riprodur bene le parti perdute, ma che questa facoltà non viene sempre all'atto, distoltane non rade volte da una o più cagioni, che ne distruggono o ne sminuiscono il buon successo. Condotta e diretto da questi giusti raziocinj facilmente sarebbesi accorto che in buona Logica non gli era permesso il tenere, come fa il *Murray*, una via di mezzo tra' miei Negatori, e i miei Fautori, ma che era astretto a dichiararsi per gli ultimi. Quanto poi ai suoi

tentativi non troppo favorevoli per queste riproduzioni , o incolpate ne avrebbe le lumache , per qualche turbatrice cagione poco atte al riprodurre , o qual Filosofo ingenuo fors' anche sospettato avrebbe che i suoi tentativi non fossero stati i meglio instituiti .

Lo *Swammerdamio* , per quanto è a me noto , è stato il primo che ci ha data un' esatta descrizione del cervello delle lumache . Cotal descrizione viene mirabilmente confermata dal chiarissimo Sig. *Girardi* . Io altresì di quest' organo ho parlato nel mio *Prodromo* , e nella prima Memoria dietro alle mie proprie osservazioni . Il Sig. *Murray* dal vedere che le lumache decapitate , quantunque non riproducano perfettamente , vivono però lungo tempo , stenta ad accordare tal verità ; per essere il cervello troppo necessario alla vita degli altri animali : *cum cerebrum in aliis animantibus omnium maxime sit necessarium* .

Ognuno si accorge che la forza di questo argomento egli l'appoggia tutta all' analogia , in quanto che dal vedere che una immenità di animali non può vivere senza cervello , ne inferisce che lo stesso debba dirsi delle lumache , le quali perciò se dopo la decapitazione vivono a lungo , convien credere che di quest' organo vadano prive . Ma ognuno altresì tanto o quanto versato in Fisiologia si accorgerà di leggieri quanto sia facile l' ingannarsi , volendo noi far uso dell' analogia , ragionando degli animali , massime allora quando da ciò che succede ne' grandi vogliamo argomentar quello che deve accadere ne' piccoli . Io però chiederei volentieri a questo illuminato Svedese , se quel liquor rubicondo che circola ne' vasi arteriali , e venosi delle rane , de' rospi , delle salamandre , e simili , pensa egli che sia vero sangue . Voglio darmi a credere che non sarà per metterlo in dubbio , per trovarsi composto di particolette globose , per nuotare in una specie di linfa o di siero , per rappigliarsi , uscito che sia dai propri vasi , e per avere l' altre proprietà , che convengono al sangue degli animali maggiori , e di noi stessi . Siccome adunque egli è fuor di contrasto , che cessando negli animali più grandi , e in noi la circolazione , lasciamo in breve di vivere , così in forza dell' analogia dovrebbe dirsi lo stesso de' minuti animali . Eppure contrariamente va la faccenda , essendo io

stato istruito dalle mie proprie esperienze, che nelle salamandre, ne' ranocchi, nei rospi si può far sì che il sangue non circoli dentro di essi per un giorno intiero, oppure si può da loro fare uscir tutto il sangue, senza che i medesimi per tutto quel tempo lascin di vivere (a). Se a un cavallo, a un bue, a un montone, a un cane, ecc. si strappi il cuore dal petto, non è egli vero che questi animali a sangue caldo quasi sul momento periscono? Ma non è egli vero egualmente che facendo lo stesso giuoco ai soprariferiti animali di sangue freddo seguitano essi per più giorni ad esercitar le funzioni vitali? Chi ignora che recidendo le gambe agli animali caldi, si obbligano in breve a mutar la vita con la morte? Ma chi evvi omai presentemente che non sappia, che facendo lo stesso giuoco alle salamandre acquajuole, ben lontano dal soccombere, ricuperano queste membra perdute? Si vede adunque di quanti errori sarebbe origine l' analogia, se prendendola dai caldi la volessimo applicare agli animali freddi. Sebbene anche sul proposito del cervello, questa medesima analogia non si scopre fallace? E' innegabile che lo spogliare di quest' organo un animale di calda tempera, e il recargli subito la morte tornan lo stesso. Ma si faccia un poco il simile ad una vipera, ad una biscia, non che ad un rospo, ad una salamandra, a una rana. Non è egli del pari innegabile che la vita di questi animali tira a lungo ciò non ostante per più giorni, e se sia d' inverno per più settimane, siccome ho avuto campo di sperimentare io stesso? Qual è quel Fifico a nostri giorni sì inerudito che ignori i due fatti notabilissimi discoperti dall' immortal *Redi*, l' uno d' una testuggine che decapitata continuò a vivere per ventitre giorni, l' altro d' un' altra testuggine che priva affatto di cervello campò sei mesi? Dirà forse il Sig. *Murray* che anche le rane, i rospi, le salamandre, le biscie, le vipere, le testuggini non hanno cervello? E se nol può negare in questi animali, non ostante che mancando di esso seguan a vivere per un tempo più o meno lungo, nol neghi tampoco o nol metta in dubbio nelle lumache, dovendoli egli accorgere da

(a) Opuscol. di Fis. Anim. e Veget.

questi fatti che la ragion di negarlo o di metterlo in dubbio, tolta dal potere elleno vivere a lungo senza quest'organo, è insufficiente e ridicola. Sebbene se ad onta del fin qui detto rimanesse tuttavia nell'animo di questo celebre Naturalista qualche ombra di dubbio intorno al cervello de' nostri testacei, più altro far non saprei che invitarlo a farselo mostrare dal Sig. *Wrisberg*, a quel modo che preso mi sono l'ardire di pregarlo a voler consultare quell'esimio Notomista per osservar gli arti delle salamandre acquajuole.

Ma il Sig. *Murray* non solamente dubita del cervello delle lumache, ma quel che è più, e che certamente il mio lettore non si aspetterebbe, dubita anche della testa. Egli adunque nella sua Memoria non ha difficoltà di dire che adopera tal vocabolo, meno per servire alla verità, che all'uso introdotto dal volgo, e da molti eruditi. Io però per riguardo a un tal punto confesso la mia ignoranza di avere sempre sentito con questi eruditi, e col volgo. Io aveva sempre con loro creduto, che un animale che ha occhi, che ha nervi ottici, che è fornito di labbra, di bocca, di mandibole, di denti, di lingua, di palato, di cervello; e che di questa bocca, di questi denti fa uso per prendere il cibo, per tritarlo, e mandarlo allo stomaco, avesse veracissima testa. E per mia istruzione chiederò volentieri al Sig. *Murray*, che m'insegni cosa vi si richiegga di più, perchè possa dirli che un animale abbia testa. Che se egli mi rispondesse non trovarli nella lumaca quell'intero complesso di organi, che si osserva ne' quadrupedi, negli uccelli, non che in noi, non saprei acquetarmi a questa risposta, giacchè in forza di essa farebbero dunque privi di testa i pesci, le serpi, le rane, ed altrettali animali, la quale stranezza non credo che sia mai caduta in mente a nessuno. Che se egli piuttosto avvisasse che intanto la lumaca non ha testa, in quanto che non ne ha punto la forma, non essendo una parte spiccata dal rimanente del corpo, ma bensì continuata con esso, risponderei che il ragionare di questo modo farebbe un voler adattare la ristrettezza delle nostre idee all'immensità della Natura. Vero è che la testa di molti animali sporge in guisa dal busto, che fa come corpo da sè: ma in quanti altri non vi è ella unita in guisa, che viene con lui a formare come un
fol

fol tutto? Non è forse tale nella famiglia delle balene, e degli altri cetacei? Non in quella dell' immenso popolo dei pesci squamosi? Non nell' altra pur numerosissima delle serpi, e degli amfibj?

Sebbene chi fa che il Professor di Gottinga più per motivo di sistema, che d' altro dubiti che i nostri rettili abbiano testa, voglio dire che il faccia su la parola del Linneo, una volta suo Maestro, e di cui è grandemente seguace, il qual Linneo non solamente mette in dubbio questa testa, ma affatto la nega, per entrar le lumache nella classe de' vermi, i quali tutti per lui sono acefali. Siccome però questo illustre Naturalista di sua negazione non adduce la più picciola pruova, e d' altronde siamo in un secolo, in cui poco si valuta l' autorità de' gran nomi, quando non è accompagnata dal peso delle ragioni; così a quel modo che non posso accordarmi con lo Scolare, nol posso neppur col Maestro. E del mio sentimento mi lusingherei bene di avere non solamente *molti eruditi*, siccome suppone il *Murray*, ma tutti i Naturalisti di Europa, a riserva di quelli che idolatrando il già celebratissimo Professore di Upsal, reputano gran peccato in Filosofia l' allontanarsi per poco da' dogmi suoi.

Finisco di ragionare del chiarissimo Sig. *Murray* col purgarmi d' una lieve accusa ch' egli mi dà. Quantunque ei convenga ch' io sia lo scopritore della riproduzione del capo nelle lumache, non vuol però ch' io lo sia di quella dei *tentacoli*, ovvero corna, come si fa chiaro dalle seguenti sue parole. „ *Si de tentaculis solis sermo est: non potest ille jure rei* „ *inventor haberi. Etenim illi a Linnè jam viginti annos ante cochleas resumere tentacula post resectionem edixit:* e si riporta alle sue *Amenità Accademiche*. T. II. p. 58.

Quando nel 1768 pubblicai il mio *Prodromo* non avendo io letto le dette *Amenità*, confesso ingenuamente ch' io mi credevo di goder solo di questa picciola gloria. Ma dopo anche di averle lette io non ho sicurezza che altri l' abbia goduta prima di me. Consultando adunque quel luogo io non trovo, quanto alla sostanza, nè di più nè di meno delle riferite parole. Non dice quell' illustre Botanico se sia stato egli che abbia fatta questa osservazione: non dice se sia stata istituita da altri; molto meno assegna la maniera con cui è sta-

ta istituita. Il dirsi adunque da lui che le lumache riproducono le corna, non è altro che un nudamente asserirlo. Ora io domando al rispettabile Sig. Murray, qual fede prestar si debba ad una semplice e nuda asserzione? Finattantochè adunque non si compiacerà egli di farmi noto chi abbia prima di me osservato questo fenomeno, e come sia stato osservato, non ascriverò a mia arroganza il credere d' esserne io stato lo scopritore, facendosi per me mallevadore il grande Hallero, dicente: *æquo animo oportet expendisse, non eum verum inventorem esse, cui vaga aliqua cogitatio elapsa sit, in nullo fundata experimento, sed eum omnino eam laudem mereri, qui verum ex suis fontibus per sua pericula, suasque meditationes eruerit, & adeo firmis rationibus stabiliverit, ut veri cupidos convincant (a).*

Non più che di due Oppositori mi resta ancora di ragionare prima di por fine alla presente Memoria, voglio dire dei Signori Presciani, e Adanson. E per rifarmi sul primo, se qualche illuminato Naturalista si fosse mai abbattuto nelle sue sperienze, di cui è stata da me riferita la somma, facilmente si farà accorto che non sono un saggio di Logica applicato alla Fisica; e quindi avrà potuto conoscere, non essere punto a stupire se tali esperienze sono state defraudate di quel buon successo, che si poteva aspettare. Ad onta però di questo, volendole io comparare con le sperienze degli altri Contraddittori fin qui menzionate, a me sembrano meno difettose; e que' difetti medesimi di che sono avvolte, sono perdonabili, per averle intraprese l' Autore in un' età, nella quale sono meno da riprendersi gli errori, che da commendarsi la volontà. Aggiunger debbo a favore di questo studioso giovane, che quando pubblicò quel suo Saggio, non lasciò per lettera di rendermene inteso, e obbligantemente di chieder da me qualche suggerimento, perchè in evento che fosse per intraprenderne qualche altro su la stessa materia, sperar potesse miglior fortuna. E dal veder io la sua docilità, e dal sembrarmi non troppo addestrato nello sperimentare, nè punto consapevole delle bellissime Memorie su le lu-

(a) Phys. T. I.

maché de' Signori *Müller*, e *Bonnet*, per tacere degli altri, che scritto hanno lodevolmente su lo stesso argomento, io lo rimandai alla lettura di questi prodi Naturalisti, perchè da essi potesse apprendere il metodo di sperimentar bene, e quindi si rendesse abile a riuscir meglio ne' suoi tentativi.

Passiamo ora a parlare del Sig. *Adanson*, ma per farlo nelle dovute maniere mi conviene prender le cose alquanto da alto. Quando mi ragguagliava l' illustre Sig. *Bonnet* con sua lettera de' 26 Agosto 1769 (a) delle osservazioni de' Signori *Cotte*, e *Bomare*, e che mostrava di restar persuaso ch' io non mi era ingannato, siccome pretendevano questi due chiarissimi Filici, la sua ingenuità non gli permetteva però che dissimulasse di dirmi " sono ciò non ostante obbligato a farvi
 „ sapere che un celebre Naturalista Francese, che ha sottopo-
 „ ste a' suoi tentativi molte centinaia di lumache, è persuaso
 „ che quando venga recisa tutta quanta la testa, l' animale
 „ non ne rifabbrica mai una nuova. Pubblicherà sicuramente la serie delle sue sperienze, e la sua autorità farebbe
 „ d' un peso di gran lunga maggiore di quella d' un *Cotte*,
 „ e d' un *Bomare*. Quello valente Osservatore, notissimo ai
 „ Naturalisti, e che non vuole ch' io lo nomini ancora, è
 „ grandemente convinto che quando voi avete creduto di ta-
 „ gliar *tutta la testa*, non avete realmente tagliato che i so-
 „ li integumenti della testa, o una *parte* di questi integu-
 „ menti. Mettetemi dunque in istato di convincerlo, che
 „ egli stesso si è ingannato, non voi. Ditemi il più presto
 „ che è possibile, se quando avete tagliata la *testa*, voi ave-
 „ te usata la cautela di esaminare al microscopio la testa ta-
 „ gliata, per assicurarvi che contenesse quegli organi tutti
 „ che formano nella lumaca ciò che dicesi *testa* „.

La gentile premura di questo mio caro e rispettabile Amico, e la parte ch' io prender doveva in questa causa, fecero ch' io non indugiassi un momento a stendere una lettera, in cui descriveva il metodo praticato nelle mie sperienze, il qual metodo non era esposto nel *Prodromo*, per non accen-

E e e ij

(a) Questa lettera è stampata nelle sue opere T. V. Part. II.

narfi quivi che la somma dei risultati . E questa lettera che dettai in francese , e che mandai al Sig. *Bonnet* , fu pubblicata nell' *Avant-coureur* dei 30 Ottobre del 1769 , e da lui è poi stata riprodotta nella seconda sua Memoria *su le Lumache* . Il ristretto della medesima è il seguente .

Voi mi chiedete se la testa da me recisa conteneva veracemente tutti gli organi , che appartengono alla testa delle lumache . Eccovi come io mi sono regolato per assicurarmi della verità della cosa . Come io seppi che questi rettili hanno la prerogativa di riprodurre , mi feci a notomizzarli per istruirmi fondatamente del loro organismo , ed in ispezialtà di quello della testa . La macchinetta anatomica del celebre *Lyonet* , munita delle sue lenti , de' suoi ferruzzi , ecc. è stata quella di che mi sono valuto in questa , ed altre ricerche anatomiche relative alle lumache . Io le facea perir dentro all' acqua , così uscivano ottimamente del guscio , allungando quanto più potevano le corna , e la testa , e in tal postura fene morivano , lasciando così all' osservatore il poterle nella miglior maniera notomizzare . Con questi mezzi ho potuto accertarmi che la testa delle lumache comprendeva effettivamente quell' intiero numero di parti , che dal sommo Naturalista *Swammerdamio* era stato osservato .

Non è dunque stato se non dopo questi pratici studj ch' io di proposito applicato mi sono a decapitar lumache , ed eccovi , illustre mio Amico , come io costumava di fare . Prima di decapitar la lumaca la lasciava uscir benissimo del proprio nicchio , così che la testa , e le corna fossero interamente spiegate . Allora con forbici affilatissime io passava all' amputazione , che riusciva mirabilmente , e la testa già recisa veniva da me posta nell' acqua , dentro cui in poche ore si dilatava , si rammolliva , e in tal guisa io poteva più facilmente notomizzarla .

Cominciava la notomia dalla parte dov' era seguito il taglio , e dopo l' avere levati gl' integumenti , aveva il piacere di osservar distintissimamente la distribuzione dei nervi , che vanno agli occhi , e all' altre parti del capo . Osservava eziandio con la medesima distinzione i varj muscoli , che servono ai diversi movimenti del capo , e non rade volte tra mezzo vi scorgeva il cervello . Continuando la notomia mi

era agevole il trovarvi l'altre parti, come sono il principio dell'esofago, la lingua, le labbra, la bocca, i denti, e le quattro corna munite de' loro nervi, de' loro muscoli, e dell'altre loro dipendenze.

Ecco, mio illustre Collega, le parti più notabili che offerivansi alla mia vista nella testa recisa. Vi domando ora se il complesso di tutte queste parti da me vedute e rivedute innumerabili volte, non è altro che gl'integumenti della testa, o una parte di questi integumenti, siccome ha preteso l'anonimo Naturalista Francese, di cui mi parlate? O se anzi tal complesso non viene interamente a formare ciò che dicesi *vera testa*, così che nel cimentar le lumache io potessi tenermi sicuro di averle veracemente decapitate?

Quelle minute osservazioni ch'io faceva su la testa vecchia, le faceva su la nuova. Sarebbe superfluo ch'io vi dettagliassi le parti, onde quest'ultima era composta. Non farei che ripetervi parola per parola quanto ho fin qui detto intorno alle parti, di cui è formata la testa vecchia, ossia la testa recisa. Dirovvi di più che ho avuto perfino l'avvertenza di misurare la testa tagliata, e di confrontar le misure con la testa rigenerata.

Così a giustificazion mia io scriveva, sono già quindici anni, al Filosofo di Ginevra, che non lasciò di comunicar la mia lettera al celebre Contraddittore Francese, ch'io ignorava allora chi fosse, e che solamente dopo alcuni anni sospettai chi potesse essere da una lettera che in Reggio favorì di leggermi il chiarissimo Sig. Abbate *Corti*, attual Superiore del Collegio de' Nobili in Modena. Questi era il Sig. *Adanson* che gliela scriveva, il quale tra l'altre cose venendo a ragionare della mia scoperta, dopo l'averla caratterizzata per una baja, per una menzogna, e me per un romanziere, per un impostore, usava le dianzi citate frasi d'*integumenti* o *invoglio della testa*; che erano quelle parti sole che a lui detta io aveva recise, quando io non aveva avuta difficoltà di pubblicamente spacciare di aver tagliata veracemente la testa.

Questi miei sospetti io li trovai poscia verificati allorchè nella state del 1779 mi fu dato di godere per alcuni giorni a Ginevra della dottissima e amabilissima compagnia del Sig. Carlo *Bonnet*. Veduta avendo egli l'incredulità del Sig. *Adan-*

fon sul noto riproducimento, dichiarata già apertamente nella lettera scrittagli li 30 Luglio 1769, e da me riferita in ristretto nel primo Articolo, stimò a proposito d'invitarlo a leggere la sua prima Memoria stampata già nel Giornale di Fisica dell' Abbate *Rozier*, per vedere qual' impressione poteva fare su l' animo di quel rinomato Accademico. E certamente da quel poco ch' io ho detto di tal Memoria nel secondo Articolo, pareva che dovesse convertirlo. Pure chi lo avrebbe creduto? Non servì essa che a confermarlo nel suo pirronismo. Tanto io appresi con inesplabile mio stupore da una lunga lettera che nel suo delizioso villereccio soggiorno mi diede a leggere il Sig. *Bonnet*, e che egli in seguito ha poi fatta pubblica nel principio della sua seconda Memoria. Non posso dispensarmi dal riferirne i tratti più principali. In essa dunque ci fa sapere il Sig. *Adanson* esser quasi dieci anni che non si occupa quasi in altro che nel decapitare lumache. Che l' immensità di queste decapitazioni lo ha vie più persuaso di ciò che dal bel principio preveduto aveva col senno, e si vuol dire che mozzata una volta radicalmente la testa a questi animali, non è mai che più la rifacciano. Quindi con la maggiore sincerità del mondo quelle sperienze che il Sig. *Bonnet* credeva decisive per la riproduzione, egli non esita punto ad opporgli, che le trova piuttosto confermatrici del contrario, o almeno sommamente dubbiose ed equivoche. Il Ginevrino Sperimentatore adunque si dava a credere di tagliar vere teste, e a giudizio del Sig. *Adanson* non ne tagliava che delle apparenti. Quindi le riproduzioni ch' egli ne ottenea non erano sostanzialmente che invogli di teste, che i loro *berrettini* o le loro *calotte*, come ama chiamarle questo Accademico. Non era egli dunque nelle sue sperienze più oculato di me, nè più destro.

Tutto il male poi ne veniva dalla poca nostra perizia nel fare il taglio. Perchè adunque noi due più non la sgarraffimo si vide il Sig. *Adanson* come in una specie di dover filosofico di prescriverci il metodo con che operare; ed io mi lusingo bene che i miei lettori ameranno di sentir questo metodo, per essere un Maestro che lo insegna, e di sentirlo ne' termini stessi dell' Autore.

„ Prendete (così egli in quella sua lettera istruisce il Sig.

„ *Bonnet*) o la grossa lumaca gialliccia di vigna , nomata *po-*
 „ *matia*, oppure la lumaca bruna di giardino, da noi detta
 „ il *giardiniere*, che è la più comune di tutte : dopo di a-
 „ verle tenute immerse uno o due giorni nell' acqua per is-
 „ minuire la loro vivacità, e la loro lubricità , strappate ad
 „ esse la mascella superiore , lavorata a ferro di cavallo , e
 „ circondata da cinque o sei denti ; strappate il palato infe-
 „ riore , che è una membrana dentata come la lingua d' un
 „ gatto , strappate le due grandi corna fornite di occhi , serven-
 „ dovi di picciole ranaglie munite di rese o di stoppa per ren-
 „ derle meno taglienti , meno sdruciole , oppure stringendo
 „ il collo dell' animale con due dita per estirpar le mascelle :
 „ prevaletevi di questa situazione sforzata per isnocciolare con
 „ tagliente coltello botanico le due corna più grandi col bul-
 „ bo inferiore degli occhi : strappate ad altre lumache le in-
 „ tiere teste , verificando se queste strappate teste sono corre-
 „ date di mascelle , e d' occhi interi : e tenete con gelosia
 „ custodite tutte queste strappate teste , tutte queste strappate
 „ mascelle , tutti questi strappati occhi , per assicurarvi che
 „ avete tante teste strappate , quante sono state le lumache
 „ per voi mutilate „.

Novissimo e del tutto inaspettato sarà giunto sicuramente a' miei lettori questo metodo di decapitar le lumache , in grazia della qual novità io non dubito punto che stati sieno da non lieve stupore compresi . Ma oltre allo stupore è grandemente a temere non siasi in loro risvegliata un' altra affezione , ch' io quasi non vorrei dire , cioè quella del riso . Al certo che questa doppia impressione venne cagionata su l' animo mio la prima volta che in casa del Sig. *Bonnet* io lessi quella lettera : e quello che accadde a me , accadde egualmente ad una scelta corona d' uomini scienziati , che quivi allor si trovavano ; ed è accaduto del pari a tutti quelli , cui l' ho data a legger dappoi . E come di fatti rattenerli dallo stupire , e dal ridere al sentir cotal metodo ? Gli altri miei Contraddittori , e tutti i miei Fautori non discordavan fra loro intorno al modo di mutilar le lumache , che era quello di farle uscire ben bene del guscio , e di decollarle allora d' un colpo solo per via d' una forbice , o d' un coltello o rasojo applicato alla radice delle corna maggiori . Ed un tal

metodo sembra il più ovvio, il più naturale, e insieme il più sicuro. Sorge un Naturalista d'alto nome, uno che per giudizio di molti Francesi, e più per suo proprio, è valentissimo nell'arte di sperimentare, uno che per dieci anni quasi continui si annunzia d'esserli occupato nel laborioso esercizio di decapitar lumache, di osservarle, di notomizzarle, il quale sentenziosamente ci fa sapere il metodo fin qui adoperato in queste decapitazioni esser fallace, e ne propone un suo proprio, che reputa sicurissimo; chi v'è tra curiosi della sperimentale Filosofia, che non desideri sentir questo metodo? Ma chi v'è tra questi, se Dio mi ami, che dopo l'averlo sentito possa non trascolare, e rattenere le risa, al trovarlo, quanto inopportuno e chimerico, altrettanto ridicolo? Il Sig. *Adanson* ci dà per primo precetto di tener tuffate nell'acqua per uno o due giorni le lumache, a fine che più non sieno tanto sdruciolevoli, nè tanto vivaci. Ma dubito forte che con tal precetto egli c' insegna a decapitar degli animali piuttosto morti, che vivi. Che al certo e la *pomatia*, e la lumaca bruna de' giardini (le due specie ch'egli consiglia di usare) o non la possono durare per sì lungo tempo dentro dell'acqua, o almeno s'indeboliscono a segno, che difficilmente sopravvivono al taglio. Io ho veduto innumerevoli volte, che queste, e tutte l'altre lumache terrestri da me cimentate, subito che si trovano immerse in questo elemento, fanno ogni sforzo per uscirne, inerpicandosi su le pareti de' vasi, e tirando anche seco que' corpi, a cui son legate, quando questi non sieno troppo pesanti. L'acqua è quel fluido che per la pelle s'insinua troppo facilmente dentro questi animali, che in poche ore li gonfia tutti, e che loro in seguito diviene fatale. L'obbligarli dunque a rimanervi dentro immerli per tanto tempo, per quanto vorrebbe l'Accademico Parigino, non è soltanto uno finuire la loro vivacità, è un farli realmente morire. E a che serve allora il decapitarli? Ma quand'anche alcuni di loro non soccombessero, è però sempre vero che una sì lunga dimora in quel liquido viene ad enormemente alterare lo stato di sanità, per cui o finiscono di vivere poco dopo l'amputazione, o rendono inetti al riproduzione.

Ma concediamo che l'acqua non sia loro fatale, nè tampoco nociva;

nociva; chi non vede che quello che non fa cotesto elemento, lo dovranno fare necessariamente gli ordigni inventati dal Sig. *Adanson* per mutilar questi animali? Chi v'è d'ingegno sì stupido, sì tenebroso, che non s'avvegga che quello strappare separatamente e mascelle, e palato, e corna, ed occhi, quel ricorrere a tanaglie, e a coltelli botanici per questi sterpamenti di parti, è un cercar di farli morire, non riprodurre? Sentasi il savio giudizio datone dall' illustre *Bonnet*. „ Io „ non trovo termini, onde esprimere tutta la sorpresa che „ cagionò in me la lettera del Sig. *Adanson*, nè dubito punto che il mio lettore non la divida con me. Ciò che il „ mio dotto corrispondente m' invitava di fare era perappunto quello che direttamente si opponeva al buon successo dell'esperienza; conciossiachè come strappare con tanaglia le „ differenti parti del capo d' una lumaca, senza produrre i „ maggiori disordini nel suo interno? Come altresì poter riuscire a strappare in tal guisa tutte queste parti? E supponendone ancora il riuscimento, non arrischiaremmo noi di distruggere con tal mezzo le sorgenti di riparazione di coteste diverse parti? Non bastava egli forse ch' io assicurato mi fossi col più attento esame della testa recisa alle mie „ lumache, che questa conteneva tutte le parti, che la caratterizzano, come le quattro corna, la bocca, le mascelle, ecc.? Era egli necessario di snocciolare con botanico coltello le grandi corna, per accertarmi se la lumaca ne riprodurrebbe di nuove? Non bastava egli che avessi veduto e riveduto più volte la nascita, e i progressi delle corna „ novelle, e che osservato avessi il nuovo occhio, e il suo „ nervo ottico comparire i primi in questa ammirabile riproduzione? „ (a)

Ma del metodo ritrovato dal Sig. *Adanson* io ho detto abbastanza, e forse anche troppo, vergognandomi omai d' essermi trattenuto tanto sopra di un'inezia, cui pare impossibile possa essere venuta in mente a un Naturalista di tanto nome. Ed è fuor di dubbio che in grazia di sì strano metodo

Tomo II.

Ffff

non ha egli mai potuto riuscire ne' suoi tentativi. Si è già veduto nel primo Articolo, che quando nel 1769 egli scriveva al Sig. *Bonnet*, infruttuosamente mutilato aveva dentro d' un anno più di 1400 lumache. Dalla seconda sua lettera nel 1778 indiritta al medesimo si raccoglie che in tutto quel frapposto intervallo non avea quasi fatto altro che inutilmente trattenerli nelle stesse esperienze. Onde chiaro apparisce quante migliaia e quante di questi poveri rettili sono state la vittima di quel rinomato Francese, che per risparmiare la vita ad altri animali da lui cimentati farà forse stato sperimentatore eccellente, ma che per i nostri non poteva esser peggiore. Io però su la mia fede posso accertarlo, che se mai avesse talento di ripigliare i medesimi tentativi, potrebbe continuarli fino al *die judicij*, per parlar col Villani, senza speranza d' ottenere una sola riproduzione; e a restar persuaso di quanto io dico, basta l' avere, cred' io, il senso comune.

Non posso lasciar di parlare del Sig. *Adanson*, senza prima far parola d' un altro animale riproducente, voglio dire la salamandra acquajuola. Neppure i miei saggi su questo picciol quadrupede hanno potuto incontrar la sua grazia. Il numero delle salamandre, a cui tagliò egli quando le gambe, quando la coda, non è forse stato inferiore a quello delle lumache decapitate. Ma con che pro? A quel modo che a queste non è mai venuta in sue mani la testa, a quelle non sono mai venute le gambe, nè la coda. Solamente in luogo di queste membra sono talvolta saltati fuori de' moncherini informi, delle massette di carne inorganiche. Qui adunque quando nel *Prodromo* io parlava di queste riproduzioni, come di cose reali, io avea, secondo ch' egli avvisa, le traveggole agli occhi, prendendo per vere gambe, per vere code rigenerate ciò che non ne avea che qualche ombratile sembianza sotto quelle forme ingannatrici di moncherini, di inorganiche masse carnose. E singolarmente per ciò che riguarda le code, egli mi redarguisce ch' io doveva sapere che quella coda, che sì frequentemente rifatta si osserva nelle lucertole, non è altrimenti una vera coda, una coda composta di vertebre ossee, siccome è tale la coda naturale di questi serpentelli, ma sibbene un rozzo moncone scaglioso. A quel modo adunque che non si può dire in rigore che le

lucertole rifabbricano la coda perduta, io non dovea pur dirlo delle salamandre, per andar composta la coda di queste di una numerosa serie di vertebre ossee, non altrimenti che si osserva nelle lucertole. Così mi sgrida il chiarissimo Sig. *Adams* nella sua lettera dei 30 Luglio scritta al Sig. *Bonnet*, e da quest'ultimo pubblicata nella sua prima Memoria su le Lumache.

Cerchiam brevemente di liberarci da queste due accuse, l'una relativa alle salamandre, l'altra alle lucertole. E quanto alla prima, io crederei che la mia apologia fosse in quel luogo del *Prodromo*, che tratta delle salamandre, e molto più si renderà manifesta nella Memoria che pubblicherò su di esse. Qui adunque negli sperimentali miei esami io teneva presso a poco quel metodo, che ho praticato nelle lumache. La prima cosa era quella d'istruirmi esattamente delle molte, e diverse parti, onde composte sono le gambe, e le code di questi animalucci; poscia mi faceva ad esaminare con pari attenzione, se queste parti tutte si rigeneravano nelle nuove membra. E quanto alla riproduzione delle code, io vedeva che la Natura operava di questo modo. Sul troncone della coda tagliata cominciava ad apparire una specie di picciolissima lingua, simile in miniatura a una glossopietra, ossia a un dente di cane carcario. La lingua andava crescendo in lunghezza, e in grossezza, e a poco a poco acquistava la forma, e le dimensioni della coda recisa, e dopo un dato tempo le divenia similissima. Internamente poi si vedeva fornita di vertebre ossee, di midollo spinale, di muscoli, di vene, di arterie, di nervi, di glandole, ecc., che sono appunto quelle parti medesime, onde era composta la coda tagliata.

Rispetto poi alle gambe recise, sul loro troncone si mirava dapprima un minutissimo cono carnosio, che in seguito andava crescendo, e dopo l'aver acquistata una data grandezza si diramava all'estremità in quattro sottili particelle, parlando delle gambe anteriori, e in cinque, parlando delle posteriori; nè si tardava molto ad accorgersi, che tai particelle non erano che le dita delle gambe, le quali dita appunto nelle anteriori sono quattro, e nelle posteriori son cinque. Intanto le gambe, e le dita riproducendosi andavan di più svolgendosi, e dopo un tempo più o men lungo si vedevano

compiutamente formate, e di esse, come pure della coda novella, le salamandre facean già quell'uso, che fanno di quelle che non sono state mutilate. L'organismo interiore nelle gambe novelle andava d'un perfettissimo accordo con quello delle vecchie, tanto nelle parti solide molli, quanto nelle parti solide dure, così che favellando di queste ultime le gambe riabbricate manifestavano nè più nè meno quel numero di officini, che trovato io avea nelle vecchie. Le verità fisiche che qui accenno, e moltissime altre analoghe, che tralascio per brevità, sono state tutte pienissimamente confermate da diversi valenti Naturalisti, ma in ispezialtà dal Sig. *Bonnet* in tre sensatissime sue Memorie sul riproducimento delle membra nelle salamandre (a). E mi lusingo bene che i savj ed imparziali lettori dal fin qui esposto conosceranno chiaramente, che quando scopersi io il primo, e pubblicai che le salamandre acquajuole riproducono le membra perdute, io avea ragione; e che quando il Sig. *Adanson* cercò d'impugnarmi, e di farmi comparire poco buon Filosofo, egli avea il torto.

Accordo di buon grado al dottissimo mio Avversario, che dopo la mutilazion delle salamandre, in luogo di code, e di gambe non abbia egli mai veduto riprodursi, che moncherini, che massette carnose. Ma è ella questa una logica conseguenza, che dunque gli altri che dicono di aver vedute queste code, e queste gambe rifatte, hanno preso abbaglio? O non è anzi più logico il dire che l'abbagliamento sia tutto suo? Conciossiachè tenendo dietro a quel suo sbozzo di esperimenti non è difficil cosa l'accorgerli dove l'errore abbia avuta sua origine. Quel corpicciuolo che pullulava sul troncone delle gambe recise, chiamato *moncherino* (*moignon*) dall'Accademico Parigino, non era in realtà che il principio della gamba novella, ma non ancora sviluppatosi a segno di avere la configurazione di gamba. Quindi volendo giudicar dall'esterno, quel moncherino si sarebbe creduto meno una gamba, che una massetta inorganica di carne *une masse de chair non organisée*, siccome tale viene appellata da questo

(a) L. c. T. V. Part. I.

Naturalista . Di fatto il Sig. *Bonnet* adopera lo stesso vocabolo *moignon*, quando vuol denotare il principio della gamma riproductentesi . Aveva dunque trovato il Sig. *Adanson* un filo sicuro che lo poteva condurre ad ammirare que' medesimi riproducimenti , che il Sig. *Bonnet* , ed io abbiamo ammirati ; ma questo filo se lo lasciò presto scappar di mano . Questo poi fosse , o perchè dopo l'aver veduto quel moncherino , non si curasse di cercare più in là , persuaso forse in mente sua per l' analogia delle lucertole , che la Natura riprodotto non avrebbe di più , o perchè anche per la poca cura usata alle salamandre , fossero queste perite innanzi di manifestare riproducimento ulteriore . Comechè sia , la verità è che intanto le sue sperienze ebbero un reo successo , in quanto che non usovvi attorno quello studio , quella diligenza , quell' assiduità che esigeva l' importanza del soggetto , e da cui come valoroso Fisico non doveva esserli .

Passiamo al secondo capo di accusa , sperando d' essermi giustificato abbastanza del primo . Il Sig. *Adanson* adunque me agramente rampogna , e sammi altamente sapere che la riprodotta coda nelle lucertole , la quale non rigenera mai le vertebre ossee , doveva ammonirmi che neppur queste vertebre ossee , e in conseguenza una verace coda non si rigenera mai dalle salamandre .

Supplico d' un benigno perdono questo insigne letterato , se ardisco asserire che in questa sua rampogna io trovo lo strano innesso di due errori , senza saper dire sì facilmente se l' uno sia minore dell' altro . Primieramente adunque dalla non verace riproduzione nelle lucertole egli argomenta la non verace riproduzione nelle salamandre . Ma quale è quel Fisico sì inavveduto , sì inesperto che argomentato mai abbia di questo modo nel gran soggetto delle riproduzioni animali ? Una immensità di animalletti , singolarmente acquajuoli , per la semplicità dell' organismo ha moltissima somiglianza co' polipi . Siccome pertanto assaiissimi di quelli non riproducono , così non dovrebbero riprodurre pur questi , se valesse l' argomento analogico del più volte lodato Naturalista . Quanto all' essenziale dell' interna struttura , non evvi differenza tra specie e specie di lumaca terrestre , secondo gli esattissimi esami dello *Swammerdamio* . Trovato avendo io dunque che in diverse spe-

cie non si ottiene la riproduzione, neppur questa si dovrebbe ottenere nell' altre. E così continuando a far uso di quell' argomento in altri animali, noi passeremmo con la maggiore facilità del mondo di errore in errore.

In secondo luogo nel favellare delle lucertole suppone il Sig. *Adanson* come un fatto dei più incontrastabili, dei più sicuri, che le loro code vadan composte di vertebre ossee. Dio immortale! Quel Naturalista che nel riprendermi dice d' essere incanutito su lo studio, e su le notomie de' minuti animali (a), non aveva dunque a' suoi giorni veduta una sola coda di lucertola? Imperocchè se veduta l' avesse, come sarebbe mai incorso in simile errore? Qui adunque permetta il correttore d' esser corretto, col rispettosamente istruirlo, che la coda delle lucertole non è altrimenti corredata di vertebre ossee, anzi neppur di vertebre, ma sibbene d' una quantità di muscoletti dall' un canto e dall' altro piramidali, strettamente insieme combaciantisi; e attorno attorno fasciati da una sottile membrana fatta a anelli, che a formar viene l' esteriore della coda. E per quanto si frughi dentro di questa coda o con l' occhio nudo, od anche armato, non è possibile di rinvenirvi la più picciola partecella ossea. E se il Sig. *Adanson* non volesse prestar fede a' miei detti, senza uscir di Parigi si faccia recare una di quelle lucertole grigie, dette *parietarie* da alcuni, per esser solite nella buona stagione a correre su le pareti delle case, oppure uno di que' lucertoloni verdi, che soggiornano nelle campagne ed anche dentro degli orti, e dei giardini, e che da' Toscani si appellan *ramarri*, e da' Francesi *lezards verts* (che è appunto quella specie, di cui favella l' illustre mio critico); si prenda egli stesso la pena di esaminar la coda a queste due qualità di lucertole, e si avvedrà poi se sono io che m' inganno, oppure egli.

Stupiranno facilmente i miei lettori, che un *Adanson*, che è quanto dire uno de' più riputati Naturalisti della Francia, caduto sia in tanti sbagli, ed errori. Si è veduta la maniera da lui prescritta nel decollar le lumache, maniera che sem-

(a) Veggasi la più volte citata lettera de' 30 Luglio 1769 scritta al Sig. *Bonnet*.

bra espressamente inventata per farle morire, non riprodurre, e ch' io non so se possa venire in mente a nessuno ingenuo ed onesto Filosofo, che senza privato interesse, senza passione va in traccia del vero. Si è veduto come al di grosso si è ingannato intorno alle salamandre col prendere, e con lo spacciare per un corpo informe, un corpo non organico ciò che era un verace rudimento di gamba, o di coda. Si è veduto come stranamente ha abusato dell' analogia sul proposito delle lucertole riferite alle salamandre. Si è veduto in fine come sia andato errato nel voler ragionare dell' organismo della coda nelle lucertole, senza avere la più picciola cognizione di tale organismo. Senza fallo che in vista di tutti questi sbagli stupiranno grandemente i miei lettori. Ma lo stupore più grande a mio avviso sarà, come a tanti sbagli unito abbia il mio Avversario tanta confidenza, non osando io dir tanto orgoglio. Quando nel 1778 egli scriveva al Sig. *Bonnet* sul proposito delle lumache, essendo già a stampa la maggior parte degli scritti favorevoli alle mie osservazioni, ei non poteva ignorar questi scritti. Se con mente disappassionata e libera da' pregiudizj si fosse presa la pena di pesatamente considerarli, aveva egli un' occasione troppo bella di non lusingar tanto le idolatrate sue idee, di ragionevolmente diffidare delle proprie esperienze, e forse ancor di ricredersi. Veder doveva che tra' miei favoreggiatori vi erano uomini di primo ordine, uomini che godono della confidenza del pubblico, e che posto hanno il suggello dell' immortalità alle sperimentali loro fatiche. Aveva egli dinanzi agli occhi le giudiziose osservazioni di alcuni suoi illustri Colleghi, registrate negli Atti della Reale Accademia, quelle in ispecie de' Signori *Herissant*, e *Lavoisier*, che d' un modo sì convincente, sì luminoso confermano la realtà de' contrastati riproducimenti. Ma a dispetto di queste palpabili dimostrazioni il Sig. *Adanson* ben lontano dal riconoscere i proprj errori, si è riconfermato ne' medesimi, e persuaso d' essere stato quel solo che su tale materia osservato abbia, e ragionato dirittamente, ha con sorpresa de' buoni Fisici accagionato gli altri che non sentivan con lui, qual gente inetta per le esperienze, e me sopra ogni altro, onorandomi insieme col gentil nome di venditore di falsi miracoli, e di chimere. Questa sua noncu-

ranza però , e questi suoi dispregi per me , non saranno mai una ragione , onde sminuire nell' animo mio quella sincerissima stima , che professò al non vulgare suo merito ; e se quando ha contraddetto ad alcune mie sperienze , ho fatto vedere che si è ingannato , non ho avuto altro in mira che difendendo me stesso di patrocinare la verità .

Terminiamo la presente Memoria con una riflessione generale . Una delle principali apparenti ragioni , per cui si è tanto messa in dubbio , ed anche assolutamente negata la mia scoperta sul riproducimento della testa nelle lumache , si è quella a mio avviso , perchè tale scoperta risguardava appunto la testa . Se si dica essere stato trovato un animale che ha la facoltà di riprodurre le gambe , di riprodurre la coda , e che queste gambe , questa coda non sono già d' una semplicissima struttura , come quelle di molti insetti , ma presso a poco composte come quelle dei quadrupedi , non v' ha dubbio che non possiamo non esser tocchi di meraviglia . Ciò non ostante la cosa non sembra a noi del tutto impossibile . Ma se riferito ci venga essere stato scoperto un altro animale , che tagliandogli il capo , fa riprodurlo , e che questo capo ha occhi , e bocca , e mascelle , e denti , e lingua , e nervi , e cervello , non solamente ne meravigliamo , ma la fantasia stordisce , s' impunta , si ributta , e quindi ci sentiamo disposti a giudicare un tal fatto più favoloso , che veritiero . Volendo noi rintracciar l' origine di questa ritrosia , di questa incredulità , è facile l' accorgerci appoggiarsi tutta all' analogia . Abituati dall' infanzia a vedere certi animali , tra mezzo a' quali del continuo viviamo , come sono molti quadrupedi , molti uccelli , molti rettili , molti anfibi , molti insetti , dalle idee particolari di questi diversi generi formiamo l' idea generale dell' intiera massa degli animali . Dal veder dunque che se a un cane , peratto d' esempio , a un colombo , a una serpe , a una rana , a una mosca venga recisa la testa , questi animali ben lungi dal rifabbricarla , sen muojono , pensiamo che lo stesso debba succedere a una lumaca , e a qualunque altro vivente . Così giudica il popolo , e quella parte di letterati , che nelle filosofiche materie non sente più alto del popolo ; ma non così il vero Filosofo , non così il vero Naturalista , quegli che letto avendo quanto da prodi Indagatori è stato

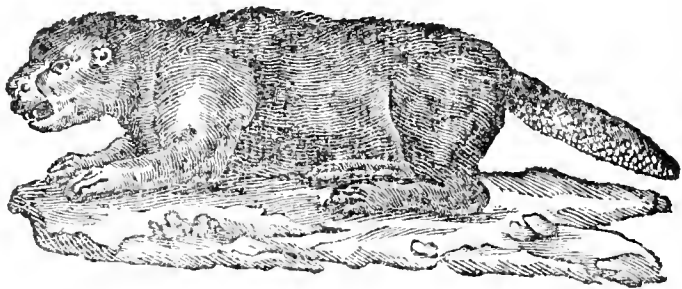
è stato osservato nell' illimitato regno degli animali , vedè per tutto anomalie , per tutto eccezioni , e quanto per conseguenza l' analogico argomento possa esser fallace . Maraviglierà egli bensì all' udir questo fenomeno , come non possiamo non maravigliare all' udir quatanque altra inaspettata novità , ma non per questo negherà la possibilità del medesimo , pel numero troppo grande di altri fatti niente meno in apparenza ributtanti di quello delle lumache , e ciò non ostante veracissimi . Tali sono i prodigj dei polipi , de' lombrichi terrestri , di alcuni vermi d'acqua dolce , quelli de' gorgoglioni , de' gallinetti , de' rotiferi , delle libelle , delle fecondazioni artificiali , e tanti altri analoghi , che sembrano essere più verosimili che veritieri . Quanto adunque nel filosofare si sono allontanati dal vero Fisico , dal vero Naturalista quegli autori che hanno messa in dubbio questa riproduzione pria di cercare di verificarla col fatto , come un *Bomare* , che comincia con queste parole sì poco degne d' un Filosofo : *Io confesso che non potendo credere a questa riproduzione ho tentato molte esperienze su questo soggetto ecc. (a) :* e un *Adanson* che in termini niente diversi dà principio alla lettera scritta al *Bonnet* : *Ho cominciato a dubitare filosoficamente il primo intorno alla rigenerazione della testa , delle corna , e delle mandibole delle lumache .* E riflessivamente considerando noi quanto su tale soggetto è stato pubblicato dagli altri miei riveriti Contraddittori , si vede spirare in tutti o quasi in tutti una cert' aria di diffidenza , di dubbietà , che non lascia celare che quando co' loro tentativi ripetevano i miei , erano già svantaggiosamente prevenuti verso di essi . Ed io non penerei molto a credere , che questa sfavorevole prevenzione sia ella pure concorsa a rendere infruttuosi que' loro saggi sperimentali , in quanto che nel farli , siccome non erano troppo bene disposti a riceverne un felice successo , non vi hanno peravventura posta attorno quella diligenza , quell' interesse , quello zelo , che tanto sono necessarj perchè le sperienze vengano a bene ; e chi sa se nel raccontare i risultati di questi sag-

Tomo II.

Gggg

(a) Articolo: *Литаса*, del suo Dizion. ed. del 1776.

gi hanno pure ufato di quella lealtà , di quella schiettezza , che esigeva l' amore del vero? Le prevenzioni tanto contrarie che favorevoli per qualche sistema , per qualche teoria , per qualche pensiero , sono per lo più state fatali per le osservazioni , per le sperienze . Ed io se qui mostrar lo volessi , non farei imbarazzato che nella scelta degli esempi . Quando ci facciamo ad interrogar la Natura ci è d' uopo l' esser liberi d' ogni pregiudizio , d' ogni passione , che la vista appanna , nè ci lascia apparire la bella faccia del vero ; e con amica indifferenza dobbiamo esser giudici tanto contra degli altri , quanto contra di noi . Che se per l' opposto saremo preoccupati da desiderj , da diffidenze , da dubbj , e da altrettali intempestive affezioni , mireremo le esperienze da quella parte che favoraggia qualche nostro gradito pensiero , non dall' altra che può contrariarlo , giudicheremo non rettamente di esse , ed in vece di accrescere alla Fisica il tesoro delle utili verità , accresceremo il numero degli errori .



LETTERA PRIMA

RELATIVA A DIVERSE PRODUZIONI MARINE

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore
di Storia naturale nell' Università di Pavia

Al Sig. CARLO BONNET Membro delle più illustri
Accademie di Europa,

Scritta il giorno 15 Gennajo 1784 Pavia.

Sapendo voi, amatissimo ed illustre Collega, il piacere che io provo nell' intraprendere nelle nostre estive vacanze qualche picciol viaggio filosofico, o a fine di accrescere di qualche rara produzion naturale questo pubblico Imperiale Museo della Regia Università di Pavia, o mosso dal desiderio di fare acquisto di cognizioni novelle, obbligantemente voi mi chiedete quai luoghi io abbia scorsi, ed esaminati la state passata, e quale sia stato il frutto di questa recente peregrinazione. Non differisco a soddisfare, come per me si potrà, le erudite vostre brame, e tanto più volentieri mi affretto di farlo, quanto che questa sarà per me un' occasione favorevole, onde trarre ulteriori lumi, e dottrine da un letterato a me sì caro, e a cui tanto debbo, e che da lungo tempo l' Europa tutta venera e onora come uno de' più gran Genj del secolo. Sul finir della lettera da me indirizzata l' anno scorso al Sig. Marchese *Lucchefini*, Ciamberlano di S. M. il Re di Prussia, la quale io ebbi il piacere di comunicarvi, avrete facilmente compreso quale soave e forte impressione abbia fatta sul mio spirito il mare, dappoichè ho avuta l' occasione di scorrerne rapidamente qualche tratto; e quale accessissimo desiderio abbia in me lasciato di visitarlo di nuovo; argomentando io da quelle poche, ma bellissime e utilissime cognizioni che allora ne ebbi, quale sarebbe stata la copia

Gggg ij

che tratta ne avrei, se riservato lo avessi con maggior agio (a). Da ciò non penerete molto a inferire qual genere di occupazioni trattenuto mi abbia la scorsa estate, le quali appunto in gran parte hanno versato sopra oggetti marini, fissata avendo a tal fine la mia dimora a Portovenere su la riviera di levante di Genova, per essere un paese contiguo al golfo della Spezia, tanto famoso nelle storie sì antiche che moderne, e tanto degno di esserlo pel sicuro asilo che presta a' bastimenti d' ogni maniera, che dentro vi approdano, ma tuttinfieme adattissimo per la calma quasi continua che vi regna ad appagar le voglie degli avidi ricercatori. Quivi adunque soggiornai sopra due meli e mezzo, senza però lasciar sovente di uscire dalle bocche del golfo, e co' legni pescherecci d' inoltrarmi in alto mare dalla parte di Livorno, e della Corsica; e durante quel tempo le produzioni marine furono il favorito mio oggetto; non ommettendo tuttavia l' esame delle adiacenti littorali montagne, e di alcune prossime isolette; e notando altresì le molte e varie circostanze che insieme concorrono a render quel golfo non men vago sopra ogni credere e diletto, che unico in tutta Europa. Sebbene stando io a Portovenere aveva di rincontro dalla parte di levante un altro grande oggetto, che a sè rapiva i miei guardi, e che in certa guisa invitavami a visitarlo. Delle vicine Panie io parlo, sì rinomate pe' nobilissimi carraresi marmi e massi, onde in buona parte vanno composte. Dalle ricerche marittime passai adunque alle montane, esaminando non solamente quelle numerose antichissime cave, ma la stratificazione, la struttura, l' impasto delle materie, onde risulta quella grand' alpe. E siccome le Panie giacciono in vicinanza dell' Appennino, o a dir meglio sono un braccio continovato con lui, perciò dopo l' avere esaminate le prime, volli eziandio esaminare il secondo. E questa doppia disamina, ragguagliata anche a quanto era stato prima da me osservato in altri luoghi dell' Appennino, mi fornì diversi termini di confronto, che per l' Oritologo mi parvero interessantissimi.

Voi avete, illustre mio Amico, le tracce, e l' idea dell'

(a) Questa lettera è stampata negli *Opuscoli scelti* di Milano.

ultimo intrapreso mio viaggio. Ma voi di ciò non farete sicuramente contento. Senza fallo che vorreste di più ch' io scendessi a' particolari, o almeno ch' io vi narrassi quanto di più notevole è stato da me osservato. Cercherò di ubbidirvi, non però in tutta quell' estensione ch' io vorrei, e che a voi forse non dispiacerebbe. Le produzioni naturali, in questa occasione da me esaminate, sono troppo numerose, troppo fra loro diverse, per poter essere esposte col dovuto dettaglio, e con gli opportuni riflessi in una sola lettera o in due, che anzi ne addimandan parecchie, le quali mi farò a scrivere, come avrò bastante ozio per esse. Adesso adunque per acquistare il merito di avervi ubbidito, non potrò far altro che ristriungere i risultati delle principali mie osservazioni in due lettere, la prima delle quali concernerà gli oggetti marini, la seconda i montani. Entro adunque senza più in materia, dividendo a maggior chiarezza l' una e l' altra lettera in tanti paragrafi, quanti sono gli articoli più importanti che a mano a mano andrò dividendo.

§. I.

Luce notturna del mare.

Fino a' tempi più rimoti era stata osservata risplender di notte in moltissimi luoghi l' acqua del mare; e di un tal fenomeno sono poi state immaginate da' Fisici diverse spiegazioni, la più appagante delle quali sembra essere oggi giorno la seguente. Si vuole che tal luce derivi in parte da fosforici animalucci marini, scoperti già nelle Lagune di Venezia da' Signori *Vianelli*, e *Griffellini*, e nel mare dell' Indie dal Sig. di *Riville*; ed in parte da viscide materie oleose, onde abbondano le acque del mare, come ultimamente ha preteso mostrare il Sig. *Canton*.

Quanto agli animalucci fosforici, ossia alle lucciolette marine, io ho avuto tutta la comodità di osservare sì bel fenomeno. Non vi ho trovata la specie descritta dal mentovato Francese, ma bensì l' altra esaminata dai due Italiani. Ho di più il compiacimento di dirvi che ne ho scoperto cinque specie affatto nuove. I tre accennati Scrittori pare che abbia-

no posto quasi tutto il loro studio nel descrivere l'organica struttura di tali lucciolette, e il picciol fosforo che nell'acqua producono: due oggetti a dir vero molto interessanti, ma che tuttavia lasciano la storia di queste curiose bestiolucce assai tronca e imperfetta. Nelle mie cinque specie, oltre alla descrizione che darò di esse, e del lume loro soggetto a molti e variati cimenti per intenderne meglio le sue qualità, la sua natura, parlerò di altre circostanze che ho creduto non dover trascurare; se la loro luce, per atto d'esempio, si estende a tutto il corpo, o ad una parte soltanto di esso; se si manifesta del continuo, ovvero a riprese: se, e quanto seguita ad averli, estratti che sieno questi maravigliosi animalucci dall'acqua: quali sono i siti del mare che abitar sogliono: se hanno facoltà di nuotare, o se serpono soltanto su que' corpi, ne' quali si trovano: se trasferendoli dal mare all'aria periscono, ed in tal caso se ridonandoli al nativo elemento rivivono, come è prerogativa di qualche altro animale: se la naturale loro moltiplicazione si ottiene per via di uova, o di feti, o mediante altro mezzo, analogo a quello dei polipi. E questo è ciò che risguarderà quel genere singolare di minuti viventi, che co' loro splendori ci fanno apparire di notte tempo in più luoghi lucido il mare.

Per conto poi di quell'altra parte di luce, che si vuole generarsi in esso da pingui sostanze vischiose, prodotte dallo scomponimento di sostanze animali, io accordo al chiarissimo Sig. *Canton*, che oltre al fosforeggiamento creatosi nel mare dalle nostre lucciolette, ve ne sia un secondo affatto indipendente dal primo, anzi di gran lunga diverso; e a suo luogo mostrerò i caratteri che essenzialmente distinguono l'uno dall'altro, la qual cosa io non so che finora sia stata da nessuno avvertita; che anzi queste due luci, quantunque provenienti da principj diversi, facilmente si confondevano insieme. Ma non posso mica convenire con lui, che la cagione di questa seconda luce sieno diverse sostanze di animali (segnatamente di pesci) periti, e scomponentisi nel seno del mare. Egli è noto che la sua ipotesi si appoggia tutta alla lucentezza, onde si ornò l'acqua marina in diversi vasi, allorchè alcuni pochi pesci da lui riposti dentro di essa cominciarono a infracidare, e a scomporsi. Il prodigioso numero de' pesci spe-

cificamente diversi che pescansi in quel tratto di mare, dov' io mi trovava, era un' opportunità troppo grande per mettere alle prove cotesta ipotesi. Vero egli è dunque che qualche pesce vicino al corrompersi facea nell' ore notturne nascere nell' acqua marina riposta ne' vasi un chiarore che prima non v' era. Ma è vero egualmente che la massima parte di loro era inetta a produr questo effetto. Di più nel novero de' pesci non lucenti vi erano d' ordinario quelli che hanno molta pinguedine, e che secondo il più volte citato Inglese devono esser più idonei, nello scomporsi che fanno, a rendere l' acqua fosforica. Un' altra ragione, secondo ch' io giudico, fortissima si oppone a questa sentenza. Se quel brillare notturno del mare, che non dipende punto da lucciolette, fosse cagionato da sostanze oleose di pesci scomposti, siccome tali sostanze soprannuotano sempre all' acqua, chi non vede che tale brillamento esser dovrebbe superficiale? Che è appunto ciò che non si accorda col fatto. Imperocchè da replicate sicurissime esperienze che addurrò, voi vedrete, illustre mio Amico, che anche alla profondità di 40 piedi parigini il mare è fosforeggiante. E però io non peno molto a credere che a qualunque profondità sia pur tale. Il che essendo, si fa chiaro abbastanza essere tal luce una proprietà inseparabile dall' acqua marina, la qual proprietà faffi soltanto ora più, ora meno sensibile a norma della diversità de' venti, delle stagioni, e di altre circostanze, siccome dalle mie osservazioni parmi di aver potuto bastantemente raccogliere. Quale sia poi, od esser possa l' origine di un tal fulgore, io vi confesso con la mia solita ingenuità, che non saprei ora dirvelo con sicurezza, non avendo io su questo curioso fenomeno che conghietture, che mi riferbo di commettere all' esperienza la prima volta che rivedrò il mare.

§. II.

Penne marine.

E' noto che con tal nome vogliono designare i Naturalisti un genere singolare di piantanimali, per avere qualche rozza somiglianza con le penne dell' ali degli uccelli; al qual

nome senza veruna ragione è stata surrogata la barbara voce di *Pennatule* dal Cavaliere *Linneo*. Anche questi viventi sono fosforici, favellando almeno di alcune specie, quale si è la penna marina *grigia*, e la penna marina *rossa*. Ma prima di farmi a dire della loro qualità fosforica, toccherò alcune mie osservazioni, che mi sembrano atte a dilucidare qualche punto controverso, relativo alla struttura, e al naturale di questi piantanimali.

Vuole il *Pallas* su l'autorità dell'*Ellis* ch' essi sieno sprovvisti di bocca, o almeno d' un foro analogo. Ma il vero è che un tal foro vi esiste benissimo, e trovasi in entrambe le spezie situato all' estremità del gambo della penna, pel qual foro entra l' acqua, e ne esce sotto forma d' un picciol zampillo. Non nego però che l' animale possa anche valersi, e si valga di fatto di moltissimi altri forellini per attrar dentro sè l' acqua, e con essa il necessario alimento, voglio dire delle boccucce de' polipi, onde abbonda la parte opposta al gambo, la quale chiamerò *piumata*, per esser simile in qualche modo alle piume. E favellando di questi polipi, siccome ho potuto esaminarli vivi, e a lungo, e in assaiissimi di questi piantanimali, così crederei di avere ampliata la loro storia, che fino adesso si può dire nascente.

E' stato creduto che le penne marine si trasferiscano da sito a sito nel mare; e ciò si è inferito da alcuni contorcimenti, e moti parziali del loro corpo, senza però che nessuno, a quel ch' io mi sappia, le abbia mai vedute muoversi progressivamente. La comodità di averne molte a mia disposizione, e di poterle osservare senza che uscisser dell' acqua marina, mi ha reso più fortunato degli altri. Ho adunque nelle due penne, rossa, e grigia, veduto chiaramente questo movimento locale, picciolo in vero e lentissimo, ma bastante a darvi un' idea che questi piantanimali sono esseri vaganti dentro del mare. Non lascerò di descrivere come eseguito venga cotal movimento. E questa facoltà *loco-motiva* contraddistingue i nostri piantanimali da tanti altri, quali sono le gorgonie, le madrepori, le millepore, gli alcioni, de' quali più sotto dovrò parlare, i quali tutti immobilmente fitti rimangono a' siti del mare, dove son nati, nè in loro si scorre verun altro moto, che quello de' polipi che per certi forellini

rellini o cellette escono dal corpo di questi piantanimali , e a lor talento si nascondono dentro di essi . Per l' opposto le nostre penne , oltre al movimento particolare de' loro polipi , hanno quello di tutto il corpo ; e quindi si possono considerare , non senza nostra sorpresa , come un grande animale , su cui in certa guisa innestati sono tanti altri piccioli , quanti sono gl' innumerabili polipi , di che si adorna .

La moltitudine da me trovata di queste penne mi ha eziandio fatto scoprire come si sviluppano , e crescono , il qual fenomeno non era stato conosciuto da que' Naturalisti , che favellato hanno di esse , probabilmente per averle sempre trovate già sviluppate , e cresciute .

Ma passiamo a far parola del loro fosforeggiamento , attissimo egli pure per le novità che comprende a piccare la nobile vostra curiosità . Voi sapete che era già noto , che tanto la penna grigia , quanto la rossa risplendono vive nell' ore notturne dentro del mare . Quindi da alcuni Sistematici sono anche state appellate penne *fosforiche* . Il fatto è verissimo , ma questo fatto abbisogna di schiarimento . Se adunque le nostre penne resteranno immote nell' acqua marina , non risplendono nè punto nè poco . Solamente la luce accendesi in esse , ogni qualvolta vengono mosse : questa mozione poi o sia loro propria , o venga cagionata dall' urto dell' acqua . Di più non risplendono solamente vive , ma anche quando sono morte : basta solamente toccarle , e il fosforo brilla egualmente fuori dell' acqua , che dentro . Poco dopo però che è cessato il moto nelle penne , prodotto dal tocco , si spegne ogni luce ; sebbene , toccandole di nuovo , non lascia di ricomparire . E qui vedete come il moto sia una condizione per averli la luce in questi esseri organici , quando tal condizione non è punto richiesta in tanti altri . Saprete quel che riferisce il *Bartolino* di una seppia (*a*) , la quale aprendola mandava un lume sì copioso e sì vivo , che allontanata di sera la candela , pareva ne avvampasse tutto il palazzo . Il Mediterraneo che abbonda di questi *molluschi* mi ha fornita più

Tomo II.

H h h h

(*a*) *Sepia octopodia* . Linné *Syst. Nat.*

d' un' occasione di cercar di averare questo prodigio, che senza ulteriori esami sembra adottarsi dal celebre *Linneo*. A dir vero non ha corrisposto alla mia aspettazione. Una luce però assai forte si è qualche volta prodotta: e ciò che ora fa al caso si è, che la medesima era bellissima, ancorchè le seppie già morte non si toccassero punto, nè si movessero. E un somigliante fenomeno mi accadeva pur di vedere in que' pochi pesci, de' quali ho ragionato più sopra (§. I.), della cui luce, come di quella delle seppie dovrò a suo luogo parlare con qualche dettaglio.

Ma ritornando alle penne marine, io osservo che quegli autori che incidentemente hanno scritto della loro luce, non ci dicono punto se questa occupa tutto il loro corpo, o una porzione soltanto; eppure era questa una circostanza da non tacerfi. Dirovvi adunque che quando son vive o morte da poco tempo, il gambo della penna non apparisce mai lucido, ma la parte soltanto piumata. Sebbene neppur questa lo è per tutto egualmente. Ma voi non indovinerete forse sì facilmente dove risegga la maggiore intensità della luce, o a dir meglio dove tragga la sua sorgente. Sapete voi dunque dove tal luce emana precipuamente? Dai polipi. Quanti adunque sono essi di numero, tanti sono i lumicini bianco-cerulei che brillano; e il loro brillare è tanto vivo, che di notte dal lume di candela poco rimane eclissato. Toccando poi i lembi della parte piumata, scorre tal lume rapidamente dai polipi verso il mezzo di lei. Nel mio libro fermerò alquanto la penna nel descrivere questo fenomeno, e allora dimostrerò che la luce de' polipi si eccita in grazia di una materia mucosa, di che abbondano. Ecco adunque come alle tante portentose prerogative di che godono i polipi, si aggiunge quella d'esser fosforici, parlando almeno dei presenti. Se poi le penne già prive di vita continuino a stare per più giorni nell' acqua (giacchè esposte all' aria, d' indi a non molto si seccano, e del tutto perdono il fosforeggiamento), cominciano internamente a scomporsi, e scomponendosi a convertirsi in un viscidume, occupante tutta quanta la porzione piumata, il qual viscidume quantunque volte col dito o con altro si tocca, di oscuro che era improvvisamente sfavilla.

Ho detto più sopra che essendo le penne nell' acqua, que-

sta s' insinua su pel foro situato all' estremità del loro gambo . Ogni penna , sia grigia o rossa , dopo qualche tempo s' imbeve talmente di cotal fluido , che da fondo a cima ne rimane fatolla . Se allora se ne estragga una dall' acqua , e si comprima con la mano la parte piumata , lasciando libero il gambo , schizza dal mentovato foro un rigoglioso zampillo ; e se l' esperimento si faccia nelle tenebre , il zampillo rappresenta una picciola , ma luminosissima fontana , la quale se venga a rompere su la mano , o su i panni , li tinge di un vaghissimo colore argentino ; se poi cada sul pavimento , vi crea a poco a poco un laghetto di candida luce .

Un fosforo così nobile , quale si è quello delle nostre penne , meritava ch' io cercassi di conservarlo a lungo , mentre sciogliendosi esse a poco a poco nell' acqua , in capo a pochi giorni sparisce . Note vi sono le premure , e lo studio del celebre nostro Italiano *Beccari* , per conservar buona pezza la luce delle foladi , quantunque al certo lungamente inferiore a quella delle penne marine . Curioso non solo , ma eziandio utile alle fisiche mie ricerche si era un secondo tentativo , contrario al primo , cioè quello d' indagare con quali mezzi veniva a spegnersi un sì bel fosforo . Ma sopra ogni altro l' investigazione dell' indole , e delle qualità della materia produttrice di questo fosforo , impegnar doveva i miei riflessi : e se tale o analoga materia sia pur quella che rende fosforici tanti altri viventi marini , così che si potesse peravventura avere fondamento di credere , che il principio produttore in loro tal luce fosse generalmente un solo . Ed avendo rapporti troppo diretti tutti questi viventi marini con le lucciole terrestri , non si poteva quasi entrare in un maturo e filosofico esame dei primi , senza farsi ad esaminare ancor le seconde . Attorno a queste ricerche mi sono adunque esercitato ; e parlando delle lucciole marine , e de' polipi fosforici , le une e gli altri mi hanno abbastanza instruito in qual conto debba tenersi l' opinione del chiarissimo Professore *Forster* , pensando che l' interrotto lucicamento di certi vermi terrestri dipenda dall' inspirazione , e dall' espirazione dell' aria (a) .

H h h h ij

(a) Rozier 1783 .

§. III.

Alcionj.

Questo genere di piantanimali, per quel lato con cui guarda i vegetabili, ha con loro maggiori relazioni di quel che abbiano le penne marine, sì perchè nel mare trovasi sempre radicato, sì perchè alcune sue specie sono corredate di tronco, e di rami, quale si è l'alcionio *palmato*, detto da alcuni *mano marina*, di cui ora prendo a parlare (a). Quel tratto di mare che guarda il mezzodì, e che è posto in dirittura del golfo, abbonda di questa specie di alcionj, e per lo più si pesca in compagnia delle penne rosse, e grigie, cioè a dire alla profondità di 200 piedi d'acqua, ed anche di vantaggio. Dice il *Pallas*, che essa nasce su gli scogli, e su le conchiglie. Ciò è verissimo, purchè non pretendasi esser questa una condizione necessaria al suo nascimento, mentre l'alcionio palmato nasce, e cresce egualmente sul fondo terroso del mare.

Questo piantanimale, quando si pesca già adulto, è ramoso. Ma è egli tale quando nasce, oppur semplice? Lo scioglimento di tal questione, come d'infinite altre, indarno lo avrei cercato su i libri. Per averlo ho dovuto consultar la Natura.

Quantunque i nostri alcionj non abbiano tutti un colore, ma altri sieno più o meno rossi nei rami, altri cenerognoli, altri bianchi, ciò non ostante io non li giudico specie diverse, per essere la loro conformazione, e la loro struttura similissima in tutti, e per osservarsi pure la stessa cosa ne' loro polipi, comechè questi pure sieno partecipi del colore dell'alcionio, a cui appartengono. Questi curiosi animalucci, creduti già dal *Marfili*, e descritti come veraci fiori, hanno

(a) Il *Linneo* che innumerabili volte cangia a capriccio i nomi alle produzioni naturali, chiama questo alcionio *exor*, senz'osio. Vero è che gli alcionj in generale considerate si possono piantanimali senz'osia, come fa-

viamente riflette il *Pallas*, per andare sprovveduti di quella sostanza dura, che si trova in tanti altri piantanimali. Ma la voce *exor* in tal caso è generica, e perciò malamente ad una sola specie si adatta.

per preferenza impegnata la mia attenzione. Quando l'alcionio si tira fuori del mare, si nascondono tutti nelle lor caver-nette. Non è però che in seguito non tornino fuori, con questo solo divario, che seguitando a restare l'alcionio all' a-ria, non si presentano che sotto forma di papille o bottonci-ni; laddove rituffando l'alcionio nell' acqua marina, ne es-cono benissimo, e spiegano i loro braccini, somigliando cia-scheduno allora ad un vago fioretto ottopetalo. Agitando pe-rò forte l' acqua, si ritirano, e si perdono quasi di vista, e lasciandola quietare, tornano a farsi vedere. Se poi l' alcionio seguirà a restare nell' acqua senza mutarla, quell' esercito di polipi cessa di vivere, rimanendo però ciascuno in massima parte fuor della propria celletta, come fa una lumaca terre-stre fuori del guscio, se si obblighi a morire nell' acqua.

Quantunque il dottissimo *Pallas* nel sugoso suo Trattato de' piantanimali dica che gli alcionj vengon dall' uova, io non veggo però che lo mostri mai nel descriverne tutte le specie finora conosciute. Quindi io opino che egli asserisca ciò, più per l' analogia di altri piantanimali, che nascon co-sì, che per avere qualche fatto che lo comproui. E però io quasi oserei asserire d' essere stato il primo a scoprire le uova negli alcionj palmati. Quale adunque sia la loro forma, e grandezza, in qual parte del piantanimale riseggano, da qual sito ne escano per nascere, faranno questi i punti ch' io mi proporrò di discutere.

L' effetto luminoso che producono le penne marine nol pro-ducono gli alcionj: anzi dirovvì, per non averlo inutilmen-te a ripetere, ch' elleno sono le sole fra tutte le produ-zioni polipifere da me esaminate, che godono di questa pre-rogativa.

Ma oltre all' alcionio palmato, ne ho scoperta un' altra specie differentissima, da me non trovata da altri descritta. Non può negarsi che sia un vero alcionio, avendone tutti i caratteri, ma è privo de' polipi, non ostante che abbia quel-le stelluzze su la sua superficie, che sogliono essere le boccuc-ce o le aperture, per dove escono questi picciolissimi viven-ti. Nè accorto mi sono che altra parte del suo corpo dota-ta sia del più picciolo indizio di senso, o di moto. In rigore adunque non può questo dirsi un piantanimale; e

però si vede che la natura nel formar gli alcionj non ha sempre infuso in loro un principio senziente.

§. IV.

Millepora Retepora.

Non per altro prendo io brevemente a parlarvi di questo piantanimale, detto non impropriamente da alcuni Francesi *Manichino di Nettuno*, per avere qualche somiglianza co' manichini di merletti, se non se per accennarvi di avere trovati in esso i suoi polipi. Sono prodigiosamente minori di quelli delle penne marine, e degli alcionj, ma laddove questi si osservan dotati d' una vita sensitiva torpidissima, in tanto che escono con infinita lentezza dalle loro cellette, e con lentezza quasi eguale vi entrano, nè si determinano ad entrarvi se non se quando o vengono irritati, o l' acqua dove sono immersi sia molto agitata; i polipi per contrario della millepora retepora sono d' un senso vividissimo, così che ad ogni lievissimo tremito dell' acqua si nascondono di presente nelle loro cavernette, senza però lasciare di tornar fuori, cessato il commovimento. Numerosi sono i loro braccini, e vengono talvolta a formare quasi un imbuto, cha ha l' apice all' apertura della cavernetta.

Questa millepora si pesca in fondo al mare a non molta profondità, e nasce, e si attacca dove che sia.

§. V.

Madrepora.

Malgrado la quasi infinita diversità delle specie, che dai Naturalisti riferita viene, e descritta di questa marina produzione, tanto somigliante per la qualità della materia, onde è composta, al corallo volgare; e malgrado i giudizioli sospetti dell' *Imperato*, e le asserzioni del *Rumfo*, e del *Peyssonel*, che una tal produzione appartenga al regno animale; certa cosa è però che a confermazione di tutto ciò noi non abbiamo finora che una sola osservazione, lasciataci dal *Donati*, per la quale

chiaramente apparisce, che la madrepora detta *ramosa* alberga i suoi polipi, come è proprio di tanti altri piantanimali. In sì grande inopia pertanto di osservazioni non crederò far cosa discara al pubblico versato in queste materie, nè a voi, se al fatto del celebre nostro Italiano ne accoppierò un mio proprio, appartenente alla madrepora *calycularis*, come la denomina il *Pallas*, o a *bottoncini*, come la potremo dir noi. In que' fondi marini adunque dove trovansi le millepore retepure si trova pur la madrepora a bottoncini, formante molti gruppi di cilindri corallini d'un bianco sudicio, grossi quanto una penna da scrivere, insieme strettamente attaccati, quali più numerosi, e quali meno, e questi gruppi non sono mai radicati a scogli o a pietre, o ad altro corpo stabile, ma giacenti semplicemente sul fango. Ogni gruppo fa corpo da sè, e quanti sono i cilindri, tanti sono i polipi che dentro vi abitano, quando questi però o per vecchiazza o per altro non sieno periti, raro non essendo il trovar molti di questi gruppi spogliati affatto di abitatori. Ciascun cilindro alla sommità è tronco, e quivi profondasi in un picciol calice, che riempito viene dal polipo, quando che esce. Questi polipi sono molto più grossi che quelli delle penne marine, e degli alcionj, ma somigliano però loro per la lentezza del moto. Perchè escano, e stendano i braccini, egli è sempre d'uopo che la madrepora si trovi nel nativo elemento. Così perchè campino a lungo dentro a' vasi, fa di mestiere cambiar l'acqua sovente, come dee praticarsi parlando degli altri piantanimali: ma non cambiandola, i polipi della presente madrepora soggiacciono a una vicenda, da me non osservata ne' polipi degli altri piantanimali. Se una penna marina, un alcionio, una millepora ecc., soggiornino sempre nella medesima acqua, i rispettivi polipi, quando periscono, rimangono tuttavia uniti alle loro cellette: per l'opposito diversi polipi della nostra madrepora partono da essa, e si trasferiscono altrove dentro all'acqua, quantunque però molti altri non si allontanino punto da' siti nativi. Questo passaggio di più polipi dalla madrepora ad altri luoghi, assai volte da me veduto, siccome è stato a me, così probabilmente sarà a voi di non leggiera meraviglia. Conciosiachè essendo così la cosa, parrebbe adunque che le millepore altro non

fossero che semplici *polipari*, ossia nidi di polipi, a quel modo, per atto d' esempio, che i vespaj sono nidi di vespe; di maniera che siccome le vespe fanno un corpo da sè, indipendente affatto dal vespajo, così pronunciar si dovesse il medesimo di questi polipi relativamente alle madrepora; la qual opinione quantunque altre volte abbia avuto a fautori de' prodi Filici, pure oggigiorno da' più limati Naturalisti viene rigettata, ammettendosi che i polipi sono talmente legati con le madrepora (e così dicasi di altre produzioni polipifere) che a formar vengono un tutto solo con loro : e questo è pure il sentimento vostro . Voi però sospendete intanto per poco i vostri giudizj, riserbandomi più sotto a ventilare con maggiore apparato di fatti questa importantissima questione, fino ad ora per quanto io ne penso, da altri non pienamente decisa . Noterò qui solo che quella separazione di alcuni polipi dalla madrepora mi è stata utilissima, in quanto che così separati, e liberi da qualunque impaccio, io ho potuto meglio osservarli, e farne eziandio qualche rozza notomia.

§. VI.

Gorgonie.

Posso dirvi che questa fatta di piantanimali è stata una delle principali cagioni di recarmi di nuovo sul mare . Sentite in pochi tratti, illustre mio Amico, come è ita la cosa . Nel Settembre del 1781 ritornando io da Marsiglia a Genova, dopo l' aver fatta in quella città di Provenza doviziosa raccolta di pesci ad uso del pubblico Reale Museo dell' Università di Pavia, ed essendomi un giorno, viaggiando sul mare, posto a leggere l' *Elenco de' Piantanimali* del Sig. *Pallas*, in' abbattei ad un luogo, scorrendo il quale, come buono Italiano, e affezionato alla mia nazione, non potei non concepire qualche sdegnuzzo verso il rinomatissimo Accademico di Pietroburgo . Cotal luogo risguarda le gorgonie, delle quali per avviso di lui sappiamo così poco per l' imperdonabile trascuranza degl' Italiani . Sentite le parole stesse dell' autore, che non possono essere più gentili, nè più obbliganti. *Certiora & specialiora ex vivis Gorgoniis disci debent; quorum nos cognitione,*

cognitione, ob Italarum, quos maris Mediterranei divitiæ, in tanta vicinitate, frustra invitant, supinam negligentiam, hucusque carere dolendum est (a). Pur troppo debbo convenire col Sig. Pallas, esservi in Italia qualche città alle sponde del Mediterraneo, che potrebbe esercitarsi con lode nell'osservare filosoficamente le produzioni marine, e che si occupa di tutt'altro. Ma questa mancanza non è tanto nostra, che non vada anche a cadere sopra qualche altra nazione; e il nominato Naturalista, giacchè con cinica libertà così parla di noi Italiani, se era equo, non dovea risparmiar i Signori Francesi. Ma lasciati da parte questi odiosi discorsi, dirovvi che determinai allora (non da altro stimolato che da voglia d'imparare) di studiar le gorgonie, se peravventura scoperto ne avessi, e sopra tutto di far diligenti esami su i loro polipi, in evento che ve gli avessi trovati. E da Genova essendo io poscia passato in quel mese istesso al delizioso golfo della Spezia, e fu di esso avendo io un giorno gli occhi rivolti ad una ricca sorgente d'acqua dolce, che sollevasi sopra il livello del mare, della qual sorgente parlerò nella seconda mia lettera, vidi fortunatamente da un lato celarsi in poco fondo un numero ben grande di arbuscelletti, alcuni de' quali avendo io fatti estrarre dall'acqua, conobbi da qualche esame istituito su loro, essere le tanto sospirate gorgonie. Ma per la stagione inoltrata non potendomi io allora trattenere di vantaggio in que' luoghi marittimi, deliberai di rivisitarli a tempo migliore, nè questo da altre mie occupazioni mi è poi stato accordato che la prossima state passata.

Si fa che per gorgonie si vogliono intendere certe produzioni marine radicate cornee ramose, spinate alla base, vestite d'una molle corteccia, ricca di cellette e di forellini, da' quali si vuole che escano i polipi. Le gorgonie da me trovate sul fondo del golfo in vicinanza della mentovata fontana sono tutte d'una qualità; e quantunque per una moltitudine di picciole verruche che hanno alla superficie si accostino alla specie denominata *verrucosa* dal Linneo, e dal Pal-

Tomo II.

Iiii

(a) Pag. 163.

las, hanno però altri caratteri che a mio giudizio le rendono diverse.

Nel restante del golfo, anzi neppur fuori di esso non trovandosi questa qualità di gorgonia, ma solamente ne' luoghi prossimi a quella grossissima fonte, dove cioè l'acqua marina mischiata alla dolce è meno falsa, sarebbe mai la minor falsità del fluido una condizione richiesta alla nascita, e all'incremento di questo piantanimale?

Gli alcionj, le penne marine, le millepore pullulano ne' fondi marini dove che sia. Le nostre gorgonie vogliono sempre per base una pietra. Nel tempo ch'io le ho esaminate, ne avrò tratto dal mare per ben dugento, e tutte quante erano tenacemente attaccate alla loro pietra. Di più quando il mare era tranquillo, e nel tempo stesso illuminato dal sole, ne vedeva sott'acqua, dove questa era poco profonda, degl'intieri boschetti, senza che mai una sola gorgonia si osservasse radicata alla nuda terra, o a qualche pianta subacquea. A riserva di non aver radici, ma di restare attaccate o piuttosto incollate al sasso con la spianata loro base, nel rimanente somigliano in picciolo a un albero sfogliato, avendo e tronco e rami e ramoscelli, e alla maniera pur degli alberi il tronco suole esser perpendicolare all'orizzonte, i rami poi, e i ramoscelli sono rivolti all'insù. Ne ha di varie grandezze, e le maggiori giungono in lunghezza fino a un piede e mezzo, e queste a proporzione hanno anche un intreccio di rami più numerosi e più larghi, le più picciole poi sono senza rami, e non arrivano tante volte a un terzo di pollice. Ma se le nostre gorgonie tanto somigliano nell'abito esteriore alle piante, hanno altresì con esse molti tratti di somiglianza nel loro interno, essendo corredate di corteccia, di legno, e di midollo. Solamente il corpo ch'io chiamo legno, e che è di mezzo tra la corteccia e il midollo, è di sostanza cornea, o almeno molto analoga al corno; e perciò non immeritamente venivano con greco vocabolo le gorgonie appellate *ceratofiti* dagli antichi, cioè *corna-piante*. Procurerò di esporre con la dovuta precisione le osservazioni da me fatte intorno a questo triplice corpo, corticale, legnoso, e midollare. Qui noterò soltanto che la corteccia così del tronco che dei rami è sempre avvolta da una sottile buccia calcare.

Fin qui considerate abbiamo le gorgonie per quella parte, con cui sembrano collegarsi con le piante: passiamo ora ad esaminarle per l'altra, con cui s'intrecciano con gli animali, voglio dire entriamo a dare un cenno dei polipi che le abitano, riserbandomi poi a ragionarne in dettaglio nella mia Opera, massimamente per non essere stati descritti da altri prima di me. Tirata dall'acqua nativa una gorgonia, si mira nel tronco, e più assai ne' rami, e nei ramuscelli piena di picciole verruche, che esaminate alla lente si scorgono forate nel mezzo, e fatte a modo di stelluzze ottangolari allungate. Se la gorgonia continuerà a restar fuori d'acqua, non sopravverrà alle verruche novità alcuna; ma se metterassi di nuovo nell'acqua, allora dal foro centrale d'ogni verruca uscirà spontaneamente un corpicciuolo, che per essere più grosso del foro stesso, lo obbligherà ad allargarsi; nè s'indugerà molto ad accorgersi che quel corpicciuolo è un polipo. Ha otto braccini, la sua figura è cilindrica, e finchè l'acqua rimane quieta, resta ognuno dei polipi fuori delle verruche; agitandola poi, o trasportando la gorgonia all'aria, si nascondono dentro di esse. Se quando vi sono nascosti, frugheremo con la punta d'un ago attorno alle verruche, troviamo i polipi rannicchiati nel fondo di esse, e pungendoli si contraggono vie maggiormente in se stessi. Sono grandicelli abbastanza per esaminarli, e disegnarli convenientemente.

Ma la discussione delle seguenti questioni doveva istruirmi di vantaggio su i polipi delle gorgonie, e su la loro economia. Che loro accade se la gorgonia matrice si stacchi dal fasso, sul quale è come incollata, lasciandola tuttavia dentro del mare? La vita de' polipi dipende ella dall'integrità della gorgonia, così che tagliandola in più parti sieno essi soggetti a perire? Oppure basta ad ogni polipo per vivere, che illesa rimanga quella porzioncella di tronco, o di ramo, dove egli si trova? Che avviene a questi animaletti, spogliando solamente la gorgonia o in tutto o in parte di sua corteccia? Reciso uno o più rami di una gorgonia, rimette ella novelli rami, come fanno le piante? Ho il compiacimento di significarvi che tengo dalla Natura la soluzione di tutti questi Problemi, e qui solo dirovi che per riguardo all'ultimo, la riproduzione che si ottiene nelle gorgonie non è si-

mile a quella delle piante, le quali si fa che al di sotto del ramo reciso gittano rampolli novelli, ma piuttosto è somigliante a quella degli animali, in quanto che su la cima d'ogni troncone pullula un cono, come si osserva ne' lombrichi terrestri mutilati, e ne' vostri vermi d'acqua dolce. Qualora poi il cono è alquanto cresciuto, mette fuori egli pure lateralmente nuove verruche, e nuovi polipi.

Quantunque queste gorgonie non allignino, come già disse, che in vicinanza di quella fonte, non è però che il golfo della Spezia non dia ricetto a qualche altra specie. Due altre certamente ve ne ho scoperte specificamente fra loro diverse. Quantunque la scarfezza degl'individui pescati non mi abbia concesso il farvi attorno quella mano di osservazioni, che ho instituite nella gorgonia sopra descritta, mi trovo però averne bastantemente per poter ragionare con fondamento di sicurezzza della natura di tali gorgonie, e di quella de' loro polipi.

Per sentimento del *Linneo* le gorgonie sono un parlante esempio del passaggio che fa un vegetabile in un animale; giacchè oltre all' avere elleno i caratteri di piante veraci, l'animata loro midolla si manifesta all' esterno in que' floridi animaluzzi, che chiamiamo polipi.

Per le mie osservazioni però credo di poter dimostrare quanto qui vada errato quel solenne Naturalista; e dir bisogna che quantunque vicinissimo al mare, veduto egli mai non avesse una viva gorgonia.

§. VII.

Spugne.

Riporremo noi nell' ordine de' piantanimali questa produzione marina? Così oltre al *Linneo* vuole il *Pallas*, pensando che le spugne sieno il termine della vita, e della natura animale, sostenuto da una lunga schiera di autori, che pretendono di avere in esse veduti non equivochi segni di senso, quantunque altri opinato abbiano contrariamente.

Le mie osservazioni versato hanno sopra due specie, che sono le sole da me vedute sul luogo, dov' io mi trovava. La

prima è una spugna arborea, bellissima per l'intreccio de' rami, e per la finezza della struttura, che si suol pescare in alto mare alla profondità di 200, ed anche 300 piedi; l'altra è una spugna più fitta, più compatta, più solida, di forma più o meno globosa, nascente nel golfo a poca profondità, e trovantesi attaccata agli scogli, alle pietre, ed anche alle vive conchiglie. Vedrete in quante, e quanto svariate maniere io ho cimentate coteste due qualità di spugne, per veder pure se manifestano qualche indizio di vita, richiamando sopra tutto ad esame il più scrupoloso quella sostanza gelatinosa, onde abbondano, e che si pretende esser la sede del senso, e del moto. E questi cimenti sono stati intrapresi quando le spugne erano nel loro elemento, anzi parlando delle globose, mentre che tuttavia restavano aderenti agli scogli. Ma offenderei le parti dell' ingenuo Filosofo, s' io dicessi di avere in loro scoperto pur segnale, pur ombra di vita o di moto: e però, quanto almeno a queste due specie, non mi sento punto disposto a riporle, come vorrebbero i due lodati scrittori, nel novero de' piantanimali; e quindi io non le giudico che semplici vegetabili; e per ciò che riguarda le globose, crederei anche di poter dire qualche cosa intorno al loro crescere, e al loro maturare, di cui nulla finora si sapeva in questo genere di produzioni.

§. VIII.

Coralline.

Le specie da me trovate sono la corallina *officinale*, la *pavonia*, l'*opuntia*, e un' altra ch' io non la crederei che una varietà di quella che viene rappresentata dall'*Ellis* nella Tavola XXIII, e da lui chiamata: *corallina articulata dichotoma, internodiis subcylindricis, cellulis rhomboideis, omnino testis, & tubulis membranaceis exiguis, colligatis (a)*. Uno degli scopi precipui di mie ricerche è stato quello di esami-

Iiii ij

(a) Essai des Corallines ecc.

nare con la maggior diligenza possibile , se queste coralline sono ricettacoli di polipi , siccome vuole questo chiarissimo Inglese , indotto a così pensare , non già perchè ve gli abbia effettivamente veduti , ma e dall' analogia , e dalle cellette minutissime che vi ha scoperte , che per lui avviso debbono essere destinate a quest' uso . Dirò io pure di avervi trovate queste cellette , o a dir meglio questi picciolissimi forellini , ma non mai dentro ad essi il più picciol vivente , ad onta anche de' più acuti microscopj adoperativi attorno , e di aver sempre osservate le coralline dentro all' acqua marina . Tai forellini sono ben diversi dalle ordinarie cellette , che ne' piantanimali alloggian de' polipi , e non sono in sostanza che pori , similissimi a quelli di assai piante marine , destinati a nodrire le coralline , sapendosi che la più parte de' vegetabili marini si nutrono per l' abito di tutto il corpo , non delle radici , di cui vanno senza . Io però penso col dottissimo *Pallas* , che le coralline si debbano separare dai piantanimali , ai quali erano state dall' *Ellis* , e dal *Linneo* male a proposito unite , e riferire semplicemente alle piante ; e tanto più mi confermo in questa credenza , quanto che in qualche specie mi è riuscito di trovar le semenze .

So che il citato Botanico di Upsal , malgrado il non poter mostrare i polipi *fosculosi* , vuole tuttavia che le coralline appartengano al regno animale , per essere d' ordinario vestite di sostanza calcare ; la qual sostanza come appunto calcare , è canone infallibile per lui , che non può essere che d' origine animale . Ma in primo luogo voi non ignorate quanto cotal canone , sicurissimo per *Linneo* , sia a tutta ragione controverso per altri . In secondo luogo volendolo anche passar per vero , quindi ne verrebbe che trovato avendo io nel mare altre produzioni vestite come le coralline , ed anche di vantaggio , di materia calcare , queste non meno dovrebbero riporsi fra gli animali ; eppure non sono che verissime piante , riconosciute anche per tali dal *Linneo* , non che dagli altri Botanici . Io parlerovvi alquanto alla stesa di così fatti vegetabili pietrosi , perchè risguardano un punto interessantissimo , e che so che picca di molto l' illuminata vostra curiosità . Voglio dunque dire che la disamina di tai prodotti mi guiderà a cercare , se essi fornir ci potessero quell'

anello o quegli anelli , che legano insieme il regno fossile col regno vegetabile . Il chiarissimo *Donati* pensava che questo anello fosse il *musco petroso* dell' *Imperato* , e voi stesso lo avvertite nella vostra *Contemplazione* . Se la cosa fosse così , lo dovrebbero pur essere per la stessa ragione le varie piante petrose testè menzionate . Ma prima che con qualche fondamento si possa questo asserire , fa d' uopo a mio avviso l' assicurarsi d' una cosa , a cui non so se sia stato da altri finora pensato . O la sostanza lapidea in queste piante è puramente avventizia , nata cioè dalle particole terrose depositate sopra di esse dall' acqua marina ; e in tal caso queste piante esser non possono il ricercato anello , altrimenti lo farebbero egualmente tutti que' vegetabili terrestri , che in vicinanza di certe fontane si veggono talvolta intonacati di tartarosa materia , e che da' Geologi *incrostanti* si appellano . O tale sostanza lapidea si è compenetrata con esse piante , ed è parte delle medesime , presso a poco come è la calce nella composizione delle conchiglie ; e allora penderei a credere che queste piante considerar si potessero come punti di passaggio dal regno vegetabile al regno lapideo . Mi lusingherei che le mie analisi dilucidar potessero questo punto ancor tenebroso . In tal' occasione mostrerò quanto si allontana dal vero il chiarissimo *Ellis* , pensante che i muschi , i fuchi , ed altrettali produzioni marine non sono semplici vegetabili , ma verissimi piantanimali .

§. IX.

I Piantanimali sopra descritti non sono nidi di polipi , o come dicono Polipari .

Dopo le famose scoperte del *Peyssonel* , e le luminose conferme di Bernardo di *Jussieu* , si era universalmente pensato , che le penne marine , gli alcionj , le millepore , le madrepo-
re , le gorgonie , i coralli , ecc. , altro non fossero che polipari , o nidi di polipi , a quel modo che i favi , e i vespa-
j sono nidi di api , e di vespe . Ma per conto delle madrepo-
re , delle millepore , e dei coralli , si fa che un tal sentimen-
to è stato combattuto dal Sig. *Herissant* , il quale fatto a-

vendo scomporre nello spirito di nitro alcune di queste produzioni, ha trovato che risultano dall' unione d' innumerevoli tubetti testacei, ciascun de' quali è composto, come le conchiglie, di una sostanza animale ossia membranosa, e di una sostanza terrosa, e che questi tubetti sono continuati co' polipi che dentro vi albergano, come è continuata la conchiglia col proprio animale (a). Cotesi polipi non sono adunque semplicemente rinchiusi nelle loro cellette, ma formano un tutto solo con esse, e conseguentemente con la madrepora, o millepora, od altro marino prodotto dove si trovano.

Non può negarsi, l' osservazione è nobilissima, e degna veramente di un tanto Accademico. Pure mi si conceda di accompagnarla da un picciol rilievo. Egli ha istituita quell' ingegnosa sua analisi a Parigi, o almeno in luogo distante dal mare, che è quanto dire allorchè le soprascritte produzioni marine erano già mancanti de' loro polipi, avendo io veduto che restando questi qualche giorno fuori dell' acqua, non solo periscono, ma per essere al sommo gelatinosi spappolano, e si riducono al nulla. Le medesime adunque sottoposte a quel dissolvente, quantunque si sieno scomposte in quella doppia sostanza, membranosa, e terrosa (mentre un tal fatto è verissimo) non potevano però fargli vedere che i tubetti, onde risultano, sono continuati co' loro polipi, giacchè questi polipi allora non v' erano. Esaminando però quel luogo della sua bella Dissertazione, dove il Sig. *Herissant* favella di questa continuazione, chiaro apparisce averla lui dedotta dall' analogia delle conchiglie, le quali sciolte che sono dallo spirito di nitro in quelle due sostanze, terrosa, e membranosa, fanno vedere che quest' ultima è un' appendice o una continuazione dell' animale medesimo. La prova di questo esimio Anatomico non è dunque diretta, ma analogica, e per conseguente non affatto persuasiva. Questa persuasione, se pur vi era, bisognava dunque cercarla ne' menovati piantanimali, quando sono forniti de' viventi loro polipi.

(a) Mem. sur l' Ossification. Mem. de l' Acad. 1766.

lipi . Io però ad accertarmi del fatto non poteva avere più bella occasione di quella della madrepora a bottoncini (§. V.), col metterne alcuni gruppi ricchissimi di vivi polipi nello spirito di nitro indebolito con l' acqua comune, come praticato aveva il Sig. *Herissant* . Tanto io feci , ed ebbi il piacer di vedere che questo celebre Fisico, usando l' argomento analogico, non si era ingannato . Ma da questa madrepora animata io trassi lumi anche maggiori . Le conseguenze furono adunque le seguenti . Primieramente i polipi non erano stati da quel mestruo niente pregiudicati . In secondo luogo ad alcuni polipi più grandi si vedevano attaccati de' polipi più piccioli, o piuttosto formavano un tutto con loro , come i rami che pullulano da un albero, o i piccioli polipi a braccio quando sono uniti al corpo materno . In terzo luogo tutti i polipi comunicavano insieme per via di numerose sottili fascie membranose, che prima dell' intiero scomponimento della madrepora si vedevano continuate con le cellette calcari, dentro cui dimoravano i polipi . Le notizie che mi fornì l' acido di nitro, me le fornì pure l' aceto, anzi per operar questo con più di lentezza, la parte animale della madrepora rimaneva anche più conservata . La conclusion generale tratta da questi fatti salta dunque agli occhi , cioè a dire che un gruppo di madrepora non è altro che un gruppo di polipi moltiplicanti per polloni , come quelli del *Trembley*, e incrostantisi a poco a poco d' una materia terrosa .

Da queste verità di fatto voi raccoglierete facilmente ciò che si può ragionevolmente pensare d' intorno a que' polipi della madrepora a bottoncini che talvolta si veggono nei vasi abbandonare le loro cellette, e recarsi altrove (§. V.) . Essendo per loro l' acqua de' vasi non così amica, come quella del mare , gli è certo che faranno ogni sforzo per fuggirsene, e stante la loro natura gelatinosa quelli che sono attaccati a' compagni con minor numero di punti , facilmente si staccheranno da loro . Di più moltiplicando eglino , come si è veduto, per polloni , non è naturale il pensare, che diversi di questi polloni giunti a maturità si stacchino spontaneamente dal comun ceppo , come fanno appunto i polipi Trembleyani, e si trasferiscano in altre parti per fondare novelle colonie? Nella qual supposizione non potremo noi cre-

dere che i polipi fuggenti dalle madrecore esser possano di questo numero.

I tentativi da me felicemente intrapresi su le madrecore, non ho potuto intraprenderli su le millecore. I picciolissimi, e appena discernibili loro polipi non me lo hanno concesso.

Lo spirito di nitro che stato mi era sì vantaggioso per le madrecore, mi si rendeva inutile per gli alcioni, e per le penne marine. Per analizzare questi piantanimali bisognava assolutamente ricorrere al coltello anatomico, lavoro che mi riuscì tanto più geniale, quanto che non era stato da altri tentato. Che immaginereste voi, illustre mio amico, che fosse un alcione, quello almeno che, per somigliar rozamente a una mano, detto viene da alcuni *mano marina*? Un prodigioso aggregato di animaletti, lavorati a guisa di altrettanti membranosi tubetti schiacciati, che tutti s' aprono all' esterno dell' alcione con quelle picciole bocche stellate che chiamiam polipi. La composizione delle penne marine non discorda molto nell' essenziale da quella degli alcioni.

Quanto poi alle gorgonie, giacchè anche di questo piantanimale qui debbo parlarvi, l'azione degli acidi, e più la notomia mi ha mostrato che i polipi sono una continuazione della corteccia delle stesse gorgonie, che questa corteccia per via di molti attacchi si unisce e si collega col corpo corneo che chiamato abbiain *legno*, e che questo legno mediante simili attacchi fa lo stesso con la midolla. Sicchè in rigore si può dire, che i polipi, la corteccia, il legno, e la midolla vengono a formare un tutto solo. Dal fin qui detto rimane dunque evidentemente provato, che le madrecore, le gorgonie, le penne marine, gli alcioni (parlando almeno del ricordato di sopra) non sono per verun conto nidi di animali, o polipari che vogliam nominarli, ma sono eglino stessi famiglie numerosissime di animali sotto l' apparenza di piante, e perciò chiamati piantanimali, del qual vocabolo io ho fatto uso, più per adattarmi alla vulgare espressione dei Naturalisti, che per servire alla verità.

§. X.

Diversi animali nuovi.

Crederò di poterli chiamar tali per non aver trovato alcuno che ne favelli. Il primo ha figura rozzamente cilindrica, è suscettibile di accorciamento e di allungamento; e quando si accorcia ha di lunghezza tre pollici circa, e di larghezza più d' uno; e quando si allunga, scema in larghezza, e cresce in lunghezza quasi del doppio. Questi diversi movimenti gli eseguisce l' animale senza il ministero di anella, che anzi il suo corpo è tutto liscio, e si vede sempre spalmato d' un lubrico e leggermente vischioso succo. La parte anteriore che chiamerò *capo* è ornata di due ordini circolari di punterelle allungate, l' uno concentrico all' altro, le quali punterelle direbbero *tentacoli* i Nomenclatori, ed io chiamerò *corni*, per avere qualche tratto di analogia con quelle delle lumache. Sono di fatti pieghevolestissime come loro, e l' animale fino a un dato segno, quando vuole, le accorcia. Quelle che costituiscono il circolo esteriore sono più lunghe dell' altre del circolo interno, giungendo le prime ad un pollice e mezzo, e le seconde ad un pollice dimezzato. Del rimanente l' une e l' altre sono somigliantissime, e tutte insieme comprese arrivano a più di dugento. Internamente son piene d' un liquor trasparente, che al gusto si manifesta essere acqua marina, e sono anche forate all' apice, mentre comprimendole ne schizza da esso apice un zampilletto di tal liquore. Non ho lasciato di fare qualche rozza notomia di questo animale.

Sta egli sempre alla profondità di pochi piedi d' acqua; e sembra preferire que' luoghi, in cui suol regnare perfetta calma. Ma queste circostanze non bastavano probabilmente per la conservazion sua. Così nudo come io l' ho descritto, e d' altronde inetto al muoversi localmente, malgrado quegli allungamenti, e accorciamenti del proprio corpo, sarebbe forse stato esposto a troppi pericoli; e però la natura ha voluto metterlo in sicuro, mediante una specie di borsa, nella quale si trova sempre rinchiuso. Costesta borsa è lunga un

Kkkk ij

piede, perpendicolare all' orizzonte, chiusa nel fondo, e qui-
vi sempre raccomandata a radici di piante marine, segnatamen-
te di alga, per cui rimane diritta; nella parte poi superiore
è aperta, ed è da questa apertura che l' animale mette fuori
il capo, e que' due ordini di corna. Se il mare è tranqui-
lo, o poco agitato, sporge immobilmente fuor della borsa,
e per la varietà del colore nelle corna, e la regolare posizio-
loro, si crederebbe più presto un fiore, che un animale. Ma
questo fiore si ritira di presente, e sparisce, quando l' acqua
venga agitata, o la mano se gli accosti per coglierlo. In quel
momento adunque l' animale si nasconde tutto dentro la borsa,
senza lasciar però di ricomparire, cessata l' agitazione o ri-
mossa il pericolo. E se la borsa entrovì l' animale si stacchi
dal fondo del mare, e si collochi in un vaso pieno d' acqua
con l' apertura all' insù, l' animale fa quel giuoco stesso di
uscire, e di nascondersi, come faceva nel luogo nativo. Es-
trattine alcuni dalle loro borse, si vede che a proporzione
che l' animale è più grande la borsa è maggiore. Queste bor-
se sono di materia molliissima, e affatto membranosa. Non
manifestano senso di sorta, non ostante che abbiano tutte le
apparenze di sostanza animale. Ho esaminata la struttura di
alcune, e non lascierò di descriverla. Qui avverto solo che
l' animale è libero affatto dentro alla borsa, così che non ha
veruna connessione, verun legame con essa, cosa ch' io non
avrei mai creduta.

Non ignorate esservi un genere di animali chiamato *tubu-
larie* dai Naturalisti, per annidare nell' acque dolci o salate
dentro a dei tubi, da' quali esce con la parte anteriore del
corpo, corredata di filamenti o cornetti. Il nostro animale
apparterrebbe mai a un tal genere? In questa supposizione ver-
rebbe a formare una specie novella, anche per la parte del
tubo a borsa, che non è di sostanza cornea, come sono quel-
li dell' altre tubularie.

Que' tratti marittimi, che danno ricetto al sopra descritto
animale, ne albergano un altro alquanto analogo ad esso,
in quanto che anche questo sta dentro ad un tubo, ed ha il
capo attorniato da una moltitudine di filamenti, quantunque
però si conosca subito essere di specie affatto diversa. Questo
con sicurezza si può chiamare una tubularia, simile alcun po-

co alla rappresentata dall' *Ellis* nella Tavola XXXIV, da lui chiamata, *corallina tubularia melitensis* (a), ma che però ha caratteri essenzialmente diversi, e perciò a tutta ragione si può dir nuova. Sentirete un faggio della sua storia, tanto per ciò che riguarda i costumi dell' animale, quanto per ciò che concerne il suo organismo, e quello del tubo albergatore. Adesso non farò che darvene un cenno. Coral tubo che è di forma cilindrica, e di sostanza cornea, oltrepassa il piede in lunghezza, ma il suo diametro è di poche linee. Esso pure s' innalza dirittamente col foro all' insù, la parte inferiore poi alla distanza d' un pollice e mezzo dalla sua estremità s' incurva, e fa gomito, e questo gomito trovasi sempre attaccato o piuttosto *ferruminato* ad una pietra, che serve al tubo di fermo sostegno per non cadere. Essendo l' acqua in moto o nel mare o dentro d' un vaso, il foro del tubo apparisce vuoto, ma cessata l' agitazione si vede riempirsi da un corpo, che a poco a poco si solleva sopra di esso; e che dall' allargarli superiormente che fa, richiama alla mente l' idea d' un pennello, il cui manico in certa guisa rappresentato viene dal tubo istesso. Il pennello si fa sempre più largo per disopra, a tal che arriva ad acquistare il diametro di quattro pollici. Così a noi si rappresenta quel corpo animato uscito dal tubo, e riguardato di faccia; se poi si miri in profilo, il pennello rimane come diviso in cinque minori, punta a punta vagamente insieme connessi. Ma si cagiona egli qualche nuova scossa nell' acqua? Sul momento si perde di vista questo gradito spettacolo, precipitatoli, e seppellitoli nel tubo il pennello, di dove prima era uscito. E' l' animale, come voi ben vedete, che dal venir fuori crea agli occhi nostri quell' inaspettata piacevolissima scena, che le prime volte che mi si offerse non potea faziarmi di rimirlarla. Il pennello non vien composto di corna, come nell' altro animale, ma di fila simili in certo modo alle penne, in quanto che ogni filo va guernito di un doppio ordine di barboline.

Anche questo animale non è punto attaccato al tubo. Ne

Kkkk iij

ho argomenti i più sicuri, i più decisivi. Se ne venga tolto, e così nudo si riponga nell' acqua, non lascia di rifare il pennello, senza però muoversi di luogo. Solamente si allunga, e si accorcia, pressò a poco come l'altro animale. E' di fibra molto irritabile, ed ha qualche somiglianza, anche per la grandezza, con le mignatte. Ve ne sono però de' più grandi, e de' più piccioli, e la mole del tubo è sempre proporzionata a quella dell' animale che dentro vi abita.

Le ricerche ch' io faceva attorno a que' granchietti, denominati volgarmente *bernardi eremiti*, de' quali più sotto dovrò parlare, mi fecero scoprire un terzo animale, che come i due antecedenti a me parve nuovo. Cinque individui adunque della medesima schiatta erano tenacemente aderenti al guscio d' un murice, la cui nicchia interna era occupata da uno di questi piccioli granchi. Quando il guscio mi fu recato da' pescatori, era più di mezz' ora che si trovava fuor d' acqua, e allora ciascheduno di questi individui rappresentava un cono troncato, la cui base del diametro all' incirca d' un pollice era come incollata al suddetto guscio. Riposto questo guscio nell' acqua non indugiarono i cinque coni troncati a presentarmisi sotto un aspetto novello. La parte adunque troncata del cono si allargò di vantaggio, e venne a formare un piano circolare, da cui spuntò un esercito di molli cornetti pieghevoli di varia grandezza, come dal capo d' una lumaca spuntan le corna. Su quel piano apparivano altresì due fori, uno centrale, e l' altro laterale. Oltracciò questo piano vedevansi a fior di pelle tutto gremito di sifoncini, i più de' quali s' imboccavano con le picciole corna. Queste poi erano turgide d' acqua marina, come si vedeva dal premerle, giacchè allora una porzione entrava ne' sifoncini, e un' altra sotto forma di zampilletto usciva per l' estremo delle corna, per esser quivi sottilmente forate; e gustandolo non si poteva negare che quel liquido fosse acqua di mare. Comprendevasi adunque come mediante un tal meccanismo ricevono questi curiosi animali l' acqua marina dentro di loro. Tutti questi fenomeni cadevano sott' occhio o que- tesse il murice, o per opera del rinchiuso eremita venisse recato da luogo a luogo. Ma toccando col dito gli animali, o movendo fortemente l' acqua, di presente si nascondevan le

corni, si perdeva quel piano circolare, ed ogni individuo ripigliava la figura d' un cono troncato. Questi viventi sembrano esser fatti dalla natura per rimanere sempre attaccati al medesimo sito. Nel tempo almeno ch' io gli ho tenuti nell' acqua de' vasi, non hanno mai lasciato quel morto testaceo.

Ma non erano eglino soli che ne occupavano la superficie. I siti vuoti rimanevano riempiti da un esercito infinito di animalletti, tanto che basta discernibili dall'occhio nudo, ma assai più chiari, contemplandoli alla lente, così fitti, così addensati su quel testaceo, che di più esser nol ponno i peli che sorgono dalla pelle d' un cane o d' un gatto. La lunghezza de' più grandicelli era di tre linee, quella de' più piccioli di una linea dimezzata. La loro trasparenza permetteva di espiarne le interne viscere. Ho adunque potuto esaminarli, e descriverli come conveniva. L' estremità inferiore d' ogni animalletto era radicata sul nicchio, la superiore, in cui scorrevasi la bocca, era rivolta all' insù. Se il nicchio veniva estratto dall' acqua, o lasciandovelo dentro se questa fortemente si agitava, gli animalletti contraendosi subito in se stessi s' impicciolivano; diversi cornetti poi, che a guisa di corona attorniavano le parti situate al di sotto della bocca, s' internavano, e nascondevansi dentro del corpo. Non ho potuto sapere come moltiplicano questi minuti viventi, per non averli veduti che quella volta sola. Mi sono però accorto che tagliandoli a brani, riproducono le parti mancanti, e che tal riproduzione si ha prontissimamente. Mi hanno offerto un altro fenomeno che non debbo tacervi. Al corpo di parecchi si vedevano attaccate delle vescichette. Queste alla lente osservate si sono trasformate in tanti uteri con dentro i feti feroventi. Questi feti non indugiavano a romper l' utero, e ad uscirne, dandosi a nuotare liberamente nell' acqua. La singolarissima maniera, onde nuotano questi animalini, e l' interiore loro conformazione, crederò due cose degne d' essere riferite. Ma questi uteri come si trovano aderenti al corpo di quegli altri numerosissimi viventi? In origine appartengono forse essenzialmente ad essi, ovvero sono produzioni parassitiche?

§. XI.

Moto progressivo ne' Ricci marini.

Parrà forse strano a taluno ch' io mi occupi di questo argomento , per essere stato trattato da due prodi Naturalisti , *Reaumur* , e *Jano Planco* , per tacere di alcuni altri non incelebri Autori , quasi che io qui null' altro far possa che ridire unicamente il già detto . Ma per questo appunto che i soprammentovati Filici ne hanno parlato , imprendo a parlarne io pure ; giacchè non convenendo essi fu di un tal punto , anzi essendo l' uno diametralmente opposto all' altro , credo opportuno l' entrare io a terzo nella questione , su la lusinga che per le mie osservazioni possa rimaner decisa per sempre . Si fa che i ricci marini sono crostacei di forma globosa , armati di spine ; e si fa egualmente dai conoscitori , che quando sono nell' acqua caccian fuori , e ritirano a lor piacimento una portentosa copia di corna lunghe e carnose . Secondo il *Reaumur* sono le spine che ne' ricci marini fanno le veci di gambe . Le corna poi , ben lungi dal concorrere ai loro movimenti , servono a fissarli a que' siti dove vogliono , e quasi ad ancorarli . Vuole per l' opposto *Jano Planco* , che delle spine non si servano punto questi animali per andare , ma che l' efficiente ed unica causa de' progressivi loro movimenti sieno le corna . E tutti e due recano in mezzo dei fatti da loro sul Mediterraneo veduti (*a*) . Se mi è lecito però l' inframmettere qui il mio sentimento , dirò che questi fatti sono troppo pochi per decidere o per l' una parte o per l' altra . I nominati chiarissimi Naturalisti hanno detto in que' brevi loro racconti qualche cosa di vero , ma non hanno detto tutto quel vero che abbisognava per chiarire pienamente la cosa . A conseguir ciò vi voleva più ozio sul mare , maggior copia di ricci da sperimentare , e tentativi più ripetuti ,

(*a*) Mem. de l' Acad. 1712 Atti
dell' Accad. di Bolog. T. V. Par. I.
Ambedue questi Autori hanno infi-

tuite le loro osservazioni su la specie
medesima di ricci marini , che è stata
pure esaminata da me .

tuti, e più variati. E tenendo dietro a quanto su tal materia hanno eglino pubblicato, apparisce che tali circostanze sono loro mancate. Divisai adunque di fare io ciò che non hanno potuto far essi, e presso i Fisici mi riputerei degno delle maggiori riprensioni, se a sommo studio cercato non avessi di levare ogni controversia, per essermi trovato in un luogo che non poteva di più abbondare di somiglianti crostacei. Io qui però null' altro farò che accennarvi alcuni de' precipui miei risultati, riserbandomi poi nel mio libro a farvene sentire le pruove.

I ricci marini sono stati da me sperimentati ora fuori dell' acqua, giacchè avea veduto che ci possono vivere per qualche tempo, ora dentro di essa. Parlerò prima di quanto ho osservato fuor d' acqua. Se adunque si collocano freschi sopra d' un piano orizzontale asciutto con la bocca all' ingiù, cioè a dire in quella situazione che è loro naturale quando vanno nel mare; allora o non si muovono punto di luogo, raggirandosi soltanto lentamente una o due volte attorno a se stessi, e ciò anche di rado; o se si muovono progressivamente, fanno pochissimo viaggio, come d' uno o di due pollici, poi del tutto si arrestan per sempre. Se poi sono capovolti, così che la bocca sia rivolta all' insù, e il podice, che giace nella parte opposta, sia volto all' ingiù, allora i ricci d' ordinario nè punto nè poco si muovono. Ma udite un fenomeno veramente strano. Se con sezione perpendicolare al diametro che termina alla bocca, e al podice si tagli il riccio in due emisferi, e se l' emisfero fornito di bocca si metta sul medesimo piano in quella postura che ha il riccio quando va nell' acqua, allora questo emisfero non indugia a muoversi, e a trasferirsi alla distanza di molti e molti piedi dal sito dove prima si era posto. Nè credeste voi già che questo fosse un casuale avvenimento. Avrò fatta la pruova sopra sessanta di questi emisferi, nè vi è stato pur uno che fatto non abbia qualche considerabile viaggio. Vi dirò di più. Que' ricci che essendo intieri, erano immoti, se nel modo già detto si dividevano in due emisferi, quello che aveva la bocca, cominciava di subito a muoversi localmente. Universalmente poi gli emisferi corredati dell' ano non davano quasi mai il più picciol passo. Ma quale può mai esser la cagione di così fatte

apparenti bizzarrie? Non ho lasciato di rintracciarla, nè lascerò a suo tempo di dirvene quel ch' io ne penso. Frattanto mi conviene farvi sapere, che que' picciolissimi viaggi ne' ricci intieri, e que' grandemente più lunghi ne' ricci dimezzati si eseguiscano tutti col ministero delle spine, senza che mai vi concorrano punto le corna; che anzi queste corna, essendo i ricci fuor d' acqua, non appariscono punto, per essere allora ritirate dentro al crostaceo. Ho studiato con quale meccanica operano le spine tali movimenti.

Resta ora a narrare i risultati dei ricci riposti nell' acqua. Per veder nettamente quanto accade in loro, è ottima cosa lo sperimentarli sul fondo piatto di un bacino di majolica bianca. Subito adunque che tal fondo resta coperto da un sottile strato di acqua, il riccio mette fuori le corna, le muove, e le agita in varj sensi, ma senza che gli diano il minimo ajuto per muoversi localmente. Nel tempo che agita le corna, agita anche le spine, e mediante queste ultime fa alquanto girare attorno a sè il corpo, ma quasi mai non lo reca da luogo a luogo, o se ve lo reca, picciolissimo è lo spazio trascorso. Se lo strato d' acqua è più grosso, allora le spine non si muovono più, ma sibbene le corna, e dall' azione di queste corna nasce il trasporto dell' animale. Che se aggiugnai nuov' acqua, talchè lo strato sia alto mezzo pollice, l' azione delle corna si rende maggiore, anche per le corna che prima non agivano, e che adesso agiscono; e in conseguenza il riccio cammina sul bacino con accresciuta celerità, e sempre indipendentemente dalle spine. E' una maraviglia il vedere più centinaja di corna impiegate co' molteplici, e diversificati lor movimenti a trasportare da luogo a luogo quella macchinetta animata. Ho con attenzione osservati questi movimenti, e ne riferirò le varie circostanze.

Il muoversi de' ricci per via delle corna è diversissimo dall' altro per via delle spine. Il moto cagionato dalle spine, qual ch' egli sia, fatti a picciole riprese; quello che prodotto viene dalle corna è continuato. Di più quello dura pochissimo tempo, questo seguita per molto. Se il catino abbia pareti alte e verticali, e riempito sia d' acqua, il riccio con facilità somma s' inerpica su per le pareti, e giunge fino al pelo dell' acqua, anzi più volte sporge da esso con parte del

corpo, e quivi arrestasi, e posa. Altre volte poi dopo l'averlo alquanto posato, discende fino al fondo del vaso, oppure fa varj giri or alti or bassi attraverso alle sue pareti. E questi diversi, e talor contrarj movimenti si eseguiscono egualmente bene dal riccio spogliato delle sue spine rasente il corpo. Le corna oltre al trasportarlo da luogo a luogo, lo fissano anche dove a lui piace, e ciò mediante un glutine gemente dalle loro estremità, in grazia del quale rimane attaccato e sospeso alle pareti verticali de' vasi, malgrado il contrariante suo peso. Se un riccio dividasi in due emisferi, come si è detto di sopra, e tutti e due si mettano nel fondo dell' acqua con la convessità all' ingiù, l' emisfero che ha la bocca si muove quasi come se fosse un riccio intiero, facendo sempre uso delle corna, e non mai delle spine; l' altro emisfero che ha l' ano non lascia di metter fuori le corna, ma quasi sempre resta immobile. Che se un intero riccio venga capovolto, facendo l' ano andar di sotto, e la bocca di sopra, allora non va niente o quasi niente, ma cerca soltanto di rivoltarsi, e di ripigliare la primiera naturale positura, presso a poco come suol fare una testuggine rovesciata, e purchè il riccio si trovi in un fondo sufficiente d' acqua, vi riesce mirabilmente col ministero delle sole corna. Lo stesso accade se in vece di metterlo supino si collochi di fianco. La meccanica che opera questi raddrizzamenti del corpo è qualcosa di singolare, e vuole esser descritta.

Ma contentato io non mi sono di esaminare i nostri ricci dentro a' vasi, ho voluto anche esaminarli nel mare, scegliendo a bella posta que' luoghi, il cui fondo per la scarrezza grande dell' acqua si vedeva chiarissimamente. Sebbene quanto ai loro moti, le cause erano pure le stesse; e vo' dire che o movessero sul fondo del mare, o su qualche scoglio, il principio efficiente di tai movimenti erano d' ordinario le corna, e di rado vi concorrevan le spine.

Da questi miei risultati, che per appoggiarsi ad una immensità di esperienze sono sicurissimi, si fa chiaro ciò che debba dirsi intorno ai sentimenti fra loro contrarj di *Jano Planco*, e del *Reaumur*. Aveva ragione il primo, quando ammetteva che le corna ne' ricci marini facesser l' ufficio de' piedi; ma aveva il torto, volendo affatto escludere da tale uf-

ficio le spine. Il secondo poi s' ingannava a partito, stabilendo che le spine fossero le sole motrici dei ricci, e che le corna non facessero che tenerli fermi. Si esamineranno le poche osservazioni recate in mezzo da questi due chiarissimi Naturalisti per sostenere ciascheduno la propria opinione, e si mostrerà come la scarsità di queste abbia potuto indurli in errore.

Ma le maniere praticate da' ricci marini per recarsi da luogo a luogo dentro del mare non sono state l' unico oggetto di mie ricerche. La loro soprabbondanza in que' luoghi dov' io mi trovava, l' agio grande di poterli osservare, e diciam anche il pochissimo che intorno ad essi è stato scritto, erano motivi per me troppo forti, onde cercare di apprendere nuove notizie da loro. I siti adunque marittimi dove amano soggiornare questi crostacei, gli alimenti che prendono, come si mettono al sicuro nelle burrasche, se vero sia, come è vulgare opinione, che le presagiscono, se sono ermafroditi, oppure se hanno differenza di sesso, quale sia il loro organismo, tanto nelle parti esterne, come sono le corna, e le spine, quanto nel guscio calcare, e nelle parti interne, sono stati punti da me discussi, e chiariti. E per ciò che appartiene alla loro organizzazione, la completa decomposizione della parte calcare, mediante un mestruo adattato, illesa la parte animale, mi ha dato luogo ad alcune nuove e interessanti osservazioni.

§. XII.

Moto progressivo in altri Animali marini.

Dovendo esser breve nel ragionare di un tal moto, restringo tutti questi animali nel presente paragrafo, cominciando da quello che il Redi, il Vallisneri, Jano Planco, ed altri chiamano *mentula marina*, giacchè quantunque questi Autori si accordino nel dire che è un animale che striscia su i fanghi, e su le arene del mare, nessuno però ci fa sapere di quali mezzi si serva per eseguir questi moti. Costui è di forma cilindrica, la sua larghezza arriva ad un pollice e

mezzo , e la sua lunghezza a diciotto , parlando almeno de' più grandi . Il colore suole essere cenerino , più aperto però nel ventre , e più fosco nei fianchi , e sul dorso . Ha due fori patenti , l' uno all' estremità posteriore del corpo , che è l' ano , l' altro all' estremità anteriore , che è la bocca . Questa bocca sta situata nel centro d' un risalto circolare , dal quale scappano , e diramanti in giro venti cilindretti muscolosi , corredati in cima di quattro come foglie dentate , così che ogni cilindretto emula bellamente un fiore . Questa mentula va provveduta d' una strabocchevole quantità di papille , con questa differenza però che quelle del ventre escono immediatamente dal corpo , e quelle del dorso escono dall' apice di piccioli tumori fatti a imbuto . Di questi cilindretti , e di queste papille , che non mette fuori l' animale se non quando è nell' acqua , si serve egli per attaccarsi dove a lui piace , mediante un visco che fa uscire da loro ; e un simil uso era già stato conosciuto dal chiarissimo *Bobadsch* nella sua *Idra* , qualità di animale diversa sì nella specie , ma non nel genere da quella , di cui ora favello . Ma per conto delle papille , avrebbe egli eziandio conosciuto un altro uso , se istituito avesse i necessarj esami , cioè a dire di servirsi la sua idra di tali papille per muoversi progressivamente . Le mentule almeno da me osservate si prevalgono sempre delle loro papille , ed in ispezieltà di quelle del ventre per passare da luogo a luogo su i fondi del mare : quantunque poi un tal moto venga ancor secondato dal vario ingrossarsi , e impicciolirsi , e allungarsi , e abbreviarsi del corpo delle mentule stesse . Di quanto io qui asserisco produrrò fatti i più sicuri , i più incontrastabili . Que' due ufficj adunque che ne' ricci marini fanno le corna , lo fanno nelle mentule marine le loro papille .

Il *Redi* dove favella delle mentule marine (*a*) , oltre le notate di sopra , che vagano liberamente nel mare , fa menzione di un' altra specie , da lui denominata anche *pinco marino* , che sta sempre radicata a qualche corpo subacqueo , sen-

LIII iij

(*a*) Degli Anim. viv. negli Anim. viv.

za mai distaccarsene , la quale specie si fa ora cadere sotto altro genere di animali , appellato *Tethyum* dal *Bobadsch* , e *Ascidia* dal *Linneo* . Questa così chiamata mentula dal celebre nostro Italiano quantunque estranea al presente paragrafo , per non godere della facoltà *loco-motiva* , tuttavia io qui ve la accenno , non solamente per dirvi che dalle osservazioni fattavi attorno io crederei di averne trovata una specie novella , ma per notificarvi eziandio che questa specie mi è paruta appartenere ad uno di quegli esseri organici , ne' quali va a finire il senso , e la vita .

La comodità accordata al *Reaumur* dalle coste del Poitou , e dell' Aunis di potere esaminare il moto progressivo delle ortiche di mare , è stata a me conceduta dal Mare ligure . E' notissimo presso i Naturali scrittori , che per ortica di mare s' intende un genere di animali molluschi , di figura tondeggiante , corredato di corna pieghevoli , e attaccantesi a' corpi subacquei (in varie specie almeno) dal *Linneo* denominato *Medusa* . Se non ho trovato le specie osservate dal citato Naturalista Francese , mi sono però abbattuto a due altre , una delle quali io giudico nuova . Concepite un cilindro molle e carnosio , lungo 18 linee , e largo 12 , attaccato col piano inferiore a una pietra , e forato nel centro del piano superiore , sotto il qual piano spunti in giro dalla superficie convessa una serie di 90 , e talora di 95 filamenti , ed avrete qualche rozza idea della forma del corpo , della bocca , e delle corna della specie di ortica ch' io non trovo descritta . Resta sempre attaccata alle pietre , e agli scogli subacquei , e allora volendola giudicare dall' occhio li crederrebbe immobile . E' però capace di movimento progressivo quando vuole , e per conoscer bene la cagione produttrice di un tal movimento , basta attaccarla col piano opposto a quello dove ha la bocca (il qual piano chiamerò base) ai lati d' un vaso di vetro pieno d' acqua . Siccome ordinariamente non ama questa ortica di starli nel luogo , in cui è stata posta , così per la trasparenza del vetro si vede come fa a mutar sito . Supponiamo che l' ortica voglia venir giù per le pareti del vaso . La porzione di base che è più alta scorre uno spazietto all' ingiù , staccandosi dal sito dov' era , e recandosi un poco più basso , senza però che l' animale can-

gi ancora di luogo. Intanto la parte staccata forma un labbro o cordone, che a guisa di placida onda s' inoltra nella base, andando sempre dall' alto al basso, e in tal maniera si tira anche dietro l' animale: quando poi il cordone è giunto alla parte ima della base, siccome allora va innanzi per un picciol tratto, così per un picciol tratto discende pur l' animale, e questo si può dire il primo passo ch' ei fa. Per farne un secondo non ha che a ripetere la meccanica di prima, e così dicasi del terzo, del quarto passo, ecc. Comechè queste ortiche per andare ricorrono il più a un tal mezzo, non è però che in certe circostanze non ne pratichino qualche altro, come si è quello di aver ricorso alle corna, quasi convertendole in piedi, oppur l' altro che è più singolare, cioè a dire di staccar la base dal sito dove impiantavasi, e allungando il corpo di spignerla più in là, ed attaccarla di nuovo, accorciando in seguito il corpo coll' accostarlo alla base, venendo a fare in tal guisa un passo a ritroso; e ripetuta la medesima operazione giugnendo a farne un secondo, poi un terzo ecc., e per tal modo recandosi da luogo a luogo con movimento retrogrado.

L' altra specie di ortica marina da me osservata sembrami essere quella stessa che accenna *Jano Planco*, e che paragona a un garofano (a). Certamente questo animale quando è pienamente spiegato, ed ha fuori le corna somiglia ad un fiore, ma in quel caso, essendo tutto rubicondo, lo comparerei piuttosto a quello d' un melagrano. Che che siane però, neppur questa ortica è mai vagante nel mare, ma è sempre attaccata a qualche corpo stabile. Per gl' innumerabili cangiamenti di figure che prende si può chiamare un vero Proteo. Mi è piaciuto di osservare con qualche minutezza questi cangiamenti, e notati ne ho i principali. Trattati diversi individui di questa ortica dal mare, e attaccati alle interne pareti di un vaso di vetro pieno d' acqua, siccome fatto aveva nell' altra, accorto mi sono ch' ella ama di rimanersi a lungo siffa sul medesimo sito. Non è per questo però che non si muova progressivamente quando a lei piace; ma per discernere cotal mo-

(a) De Conch. min. not.

to , e come si eseguisce , gli è d' uopo ricorrere alla lente . Volendo a cagion d' esempio discendere dal vaso l' ortica , spinge avanti con infinita lentezza quella porzione di base del suo corpo , non già che è in alto siccome si è veduto nell' altra ortica , ma che è al basso , alla qual porzione tien dietro con pari lentezza il rimanente della base , e conseguentemente del corpo , e così l' ortica trasportasi al basso per uno spazietto arcipiccolissimo . Iterando l' operazione , viene ella a scorrere un secondo spazietto eguale al primo , e nella medesima maniera ne descrive altri e poi altri . Ma essendo questi spazietti , siccome io diceva , brevissimi , quindi è che trascorso l' intervallo d' un' ora , appena è giunta l' ortica ad aver fatto un mezzo pollice di cammino . L' altra ortica è men pigra a muoversi progressivamente . E questo è l' unico mezzo , per quanto è a me noto , onde si strascica da sito a sito la presente ortica .

Queste due qualità di viventi non essendo state da' curiosi studiate , ho procurato di studiarle io , esercitandomi sopra tutto in quella parte che riguarda l' economia animale , siccome la più interessante . Ve ne ragguaglierò altra volta , non potendo qui però trattenermi dal favellarvi brevemente d' una cosa , che non solo riguarda le ortiche di mare , ma pressò che tutti gli animali fin qui menzionati . Parlo di que' braccini , e picciole corna che ho detto spuntare da' loro corpi : essendo a voi noto che ingegni analoghi sono destinati in più altri animali acquajuoli a creare col loro moto di vibrazione un tenue vortice nel fluido , impellente alla bocca dell' animale i corpicciuoli che dentro vi nuotano , è più che probabile che nata in voi sia la curiosità di sapere , se cotesti braccini , cotesti cornetti sono fatti pel medesimo uso , e il mio silenzio saravvi forse rincresciuto . Ma io non potea nulli dirvi di un tal vortice , perchè non ha luogo nei nostri animali . Che anzi se si eccettuano i ricci marini , le mentulle , e la prima specie di ortica , le corna , e le papille de' quali si agitano in varj sensi , senza però creare nell' acqua verun moto sensibile , queste parti nel rimanente de' nostri animali , spiegate che sieno , si rimangono continuamente in pienissima quiete . E' dunque per sè chiaro che il loro ufficio in queste generazioni di viventi è diverso . Quanto alle papille delle

delle mentule, e alle corna de' ricci marini, si è già veduto che la loro destinazione è quella di far muovere l'animale, e di ancorarlo. Le corna poi delle ortiche, e quelle degli animali del paragrafo X. io sono persuaso che sieno tubi fatti dalla Natura per ricevere l'acqua marina, e trasmetterla al corpo dell' animale, siccome ha pensato delle sue ortiche il *Reaumur*, e crederei di poterlo evidentemente mostrare. Per conto poi de' filamenti penniformi della mia tubularia, e de' braccini de' polipi dei piantanimali già descritti, io vi manifesterò sul loro uso le mie congetture.

Oltre alle ortiche che sembrano fisse, parla il *Reaumur* di alcune altre, che chiamano *erranti*, per trasferirsi, nuotando, da luogo a luogo nel mare. Queste imitano la forma di un fungo a ombrello capovolto, del diametro talvolta di due piedi: hanno la consistenza, o a dir meglio la tenerezza di una gelatina, e per poco che si tengano fra mani si sciolgono in acqua. L' ombrello che è convesso al di fuori, e concavo dentro, è dotato d'un moto alterno di restrizione, e di dilatazione, emulante quello di sistole, e di diastole, e mediante questa sistole, e questa diastole nuota l'animale, ed erra nel mare.

Questa nobile osservazione, che è tutta del sopraccitato illustre Accademico, l' ho verificata con piacere in diverse ortiche erranti. Sonomi sopra tutto trattenuto a contemplare quella specie di sistole, e di diastole, e tra alcune particolarità che riferirò, ho ammirato che un tal moto reciproco dura nell' ortica da tre quarti d' ora cavata dall' acqua marina. Ho veduto di più che il suddetto moto pare che sia l' unico argomento che questo strano essere ha vita, giacchè irritandolo, ferendolo, tagliandolo a pezzi, non dà egli il più picciolo indizio di senso o di moto. Per altro le mie ortiche erranti quantunque lasciate in asciutto si sciolgano a poco a poco pressochè tutte in acqua, sono ciò non ostante ben lontane dall' esser tenere a guisa di gelatina, come si erano quelle che osservato aveva il *Reaumur*. Hanno anzi una sofdezza, che è di mezzo tra la membrana e la cartilagine. Quando si scompongono, e si sciolgono, trasmutansi in un fosforo nobilissimo.

Nelle sue ricerche su le ortiche tanto fisse, quanto erranti

esamina il *Reaumur* se vero sia, che toccando questi animali producano in noi quel molesto prurito, che produce la pianta che porta un tal nome, siccome hanno scritto gli antichi, i quali per questo appunto gli hanno caratterizzati col nome di *ortiche*. Quantunque però egli non si opponga direttamente a un tal sentimento, afferma tuttavia che le ortiche sperimentate da lui non hanno mai cagionato un simile effetto. Era troppo naturale che anche su di un tal punto soddisfar volea la mia curiosità. Senza però dar torto al Naturalista Francese, dirò che gli antichi Filosofi non si erano ingannati. Vero è che qualche ortica marina, per quanto venga da noi toccata, e stropicciata, si trova innocente. Tale si è quella che ho paragonata ad un fiore di melagrano. E tali sicuramente state faranno le cimentate dal *Reaumur*. Ma è ben diversa l'altra ortica a figura cilindrica, corredata di 90 corna all'incirca. Vo' adunque dire che se questa a toccar venga qualche parte delicata del corpo, come farebbe il collo, oppure il volto, produce effetti a quelli dell'ortica niente inferiori. L'ho provato replicatamente in me stesso, e ve ne particolarizzerò le conseguenze, come altresì la cagione efficiente e immediata che le produce. Ed è ben credibile che questa ortica marina non sia la sola a possedere tal realtà.

§. XIII.

Picciol granchio, denominato Bernardo l' Eremita

Anche in una singolarità di questo curioso animale non si accorda con la veneranda antichità uno de' più grandi Naturalisti del secolo. Fino a' tempi di Aristotele fu detto, ed è poi stato ripetuto da cento altri, che una specie di granchietto marino per avere la pelle dell'abdomine non già dura e crostosa, come quella degli altri suoi simili, ma molliissima e delicatissima, va a nascondersi e a vivere dentro alla prima chiocciola vuota che trova; dal che ha poi tratto il nome di *Bernardo l' Eremita*, per la profonda solitudine nella quale vive là dentro. Questa antichissima opinione, che anche oggi giorno non lascia di avere i suoi seguaci, è stata forte-

mente impugnata col valido mezzo della notomia dallo *Swammerdamio*, la cui autorità sola in somiglianti materie può valere per mille. Egli adunque pretende che la conchiglia ossia il nicchio, dentro cui alloggia questo picciol granchio, non è stato altrimenti da lui usurpato, ma è suo proprio, in quella guisa medesima che è loro proprio il nicchio degli altri testacei. Conciossiachè a quel modo che il nicchio di questi rimane attaccato, e come immedesimato al loro corpo per via di produzioni tendinose; così mediante un simil legame questo granchietto si trova attaccato, e come incorporato al nicchio, dentro cui soggiorna: nè lascia l'Olandese Naturalista di assegnare il sito preciso di questo attaccamento, facendo nel tempo stesso le maraviglie come tal cosa non sia stata da altri osservata. Quel fatto adunque che dai Naturalisti si ammetteva per sicurissimo, viene per lo meno con questa osservazione a rendersi incerto, e dubbioso, e l'incertezza e il dubbio si accrescono da un'altra osservazione del medesimo celebre Fisico, la quale si è che quegli tra nostri granchietti, che sono della medesima specie, si trovano sempre rinchiusi in conchiglie fra loro consimili.

I siti del golfo contigui alla terra, e poveri d'acque formicolano di una immensità di bernardi eremiti. E come dunque non dovevano invogliarmi ad entrare io pure in questa disamina, per accertarmi co' proprj occhi se le ragioni mosse dallo *Swammerdamio* veramente sussistono? L'ho fatto effettivamente, quantunque poi allettato dalla materia contentato io non mi sia di questo solo, ma ho voluto estendere le mie ricerche più in là, coll'indagare ciò che si osserva di più curioso, e più importante intorno agli andamenti, e alla vita di questi minuti crostacei, tanto allorchè si trovano nel natio loro elemento, quanto ogni qualvolta ne sono fuori; come pure ciò che loro accade, facendoli uscire del guscio, e riconsegnandoli all'acqua, oppur tenendoli in terra; a far breve ingegnato io mi sono di abbozzare la naturale loro storia, che assolutamente mancava. Della quale storia però per amore di brevità non farò qui punto parola, ma accennerò soltanto alcuni fatti, da cui apparirà, come mi lusingo, che il più volte lodato Olandese da una seducente apparenza è stato indotto in errore. Primieramente quantun-

que i bernardi eremiti da me osservati fossero tutti della medesima specie, non lo erano però le conchiglie albergatrici, che anzi bene spesso si scorgevano di genere fra loro diversissimo. In secondo luogo quelle conchiglie della stessa specie, o di specie diversa che in un sito del mare alloggiavano dentro loro questi granchietti, in altro sito le medesime contenevano dentro vivo il loro animale. Da questi due fatti chi non vede adunque che di quelle conchiglie li erano impadroniti i nostri granchietti, per essere rimaste vuote per la morte de' naturali loro animali? La qual verità viene a rendersi più manifesta e palpabile dalla considerazione di queste medesime conchiglie, dentro cui annidavano i nostri piccioli Diogeni, altre delle quali si osservavano logore, e talvolta in più d' un luogo bucate, altre nella superficie esteriore spogliate della liscia loro corteccia, altre mancanti d' un terzo, ed anche della metà della parte superiore. Finalmente non tutti questi granchietti erano abitatori delle conchiglie, ma ne trovava pur diversi della stessa specie rincantucciati o negli screpoli degli scogli subacquei, o in alcuni pezzetti di canna, gittati o caduti a caso nel mare, e immersi in parte nel fango, o infine nei fori delle pietre, prodotti da' vermi litofagi.

Ma come dunque conciliar queste mie osservazioni con l' altre dell' Olandese Anatomico, per cui si ricava la forte adesione di questi granchietti col nicchio che li rinferra? Rifletto primamente che i suoi esami sono stati istituiti intorno a questi animali, essendo già morti, e conservati da qualche tempo nello spirito di vino. Rifletto secondamente che per attestazion sua non tutti, ma alcuni soltanto si vedevano attaccati al guscio verso la metà del loro corpo (a). Ho voluto cavarmi la curiosità d' immergere nello spirito di vino diversi di questi crostacei quando eran vivi, e dopo più giorni d' immersione avendoli estratti, ed espiati dentro al loro guscio, ho trovato presso a poco quanto dice lo *Swammerdamio*. Alcuni adunque per quella protuberanza stessa, e che è posta verso la sommità dell' abdome (la qual protube-

(a) Bibl. Natur.

ranza è per lui il fito che lega l' animale al guscio) si vedevano attaccati all' interno del guscio ; ma esaminando bene quell' attaccamento , dava esso chiaramente a conoscere, che non proveniva già da alcuna appendice tendinosa o muscolosa, ma bensì da un succo alcun poco viscido , riposto su quella protuberanza, il qual succo probabilmente era scaturito da lei. E di vero se quell' attacco derivasse da muscoli o tendini, come non dovrebbe manifestarli più chiaramente in questi animali quando son vivi ? Eppure niente di questo si osserva. Ho rotto con forti mollette una infinità di questi gusci per la parte della loro apertura ossia bocca , staccandone a poco a poco dei pezzetti, finchè arrivava al nascosto granchietto , e a quella protuberanza carnosà , senza che abbia mai questa trovata una sola volta attaccata al guscio . Solamente per essere questa particella più risaltante dell' altre vedevasi in maggior contatto col medesimo guscio ; e questa probabilmente è la ragione per cui dopo la morte del granchietto si trova talvolta in qualche adesione coll' interna faccia del guscio. Que' minuti granchi adunque, quando io andava via via per la parte superiore rompendo le portatili loro cassette, erano liberi affatto dentro di esse: e da ciò nasceva che di mano in mano, che per i pezzetti tolti rendeva le cassette più picciole , coloro discendevan più basso , in tanto che in ultimo li trovava rannicchiati nel fondo : il che non sarebbe accaduto se verso la metà de' loro corpi stato vi fosse con le cassette quel supposto tenace vincolo . Se poi in vece di rompere con le mollette la parte superiore del nicchio , rompeva l' inferiore, senza offendere l' interno solitario, non indugiava egli ad uscir per la bocca, e a fuggire, altra pruova egualmente dimostrativa, che egli da nessun legame colà dentro era attaccato. Da ultimo se ai granchietti espulsi dai gusci ne offeriva dentro all' acqua degli altri già vuoti , taluno se ne impadroniva , e viveva nel nuovo come vissuto aveva nel vecchio.

§. XIV.

Mitili litofagi, vulgarmente chiamati dattili.

Questo marino animale non si dee confondere con un altro che porta altresì il nome di dattilo, e che *folade* anco si appella. Il guscio del primo risulta di due pezzi, e quello del secondo di tre senza che questi due animali nell'organismo sono affatto diversi. Il nostro dattilo, così forse chiamato per avere qualche somiglianza con le frutta delle palme, l'ho trovato prodigiosamente moltiplicato in Istria vicino a Rovigno, ed ho pur veduta la stessa abbondanza nel golfo della Spezia. Vien riposto dal *Linneo* nel genere dei mitili, e da lui chiamasi *litofago*, quasi *mangiapietre*, perchè sta sempre imprigionato dentro di esse. Non evvi scoglio o pezzo di scoglio sottostante all'acque del golfo, che forato non sia da questo testaceo, e che non ne racchiuda ben molti. Potete immaginarvi, dottissimo amico, quanto un tal vivente sì poco finora esaminato, e per la sua singolare maniera di vivere tanto meritevole di esserlo, punto abbia la mia curiosità. Con l'esempio delle foladi, viventi esse pure dentro gli scogli, e che per le giudiziose osservazioni del *Reaumur* sappiamo che vi sono entrate allorchè quegli scogli eran teneri, si presenta come da sè la ricerca, se lo stesso debba pensarsi de' nostri dattili. Il contrario però è stato deciso da due celebri Naturalisti, *Vallisneri*, e *Fortis*; e se tuttavia intorno alla loro decisione rimanesse qualche dubbietà, io farei al caso di toglierla, avendo molti e irrefragabili fatti che i nostri dattili foran le pietre già dure durissime. Delle tante questioni però che intorno ad essi venir possono in mente de' Fisici, questa mi par l'unica che sia stata sciolta. Se i dattili bucano gli scogli nello stato già petroso, quale dunque farà lo stromento o il mezzo che praticano per far ciò? Si valgono forse di piccioli denti ossei, come fanno le brume che trivellano le tavole de' bastimenti? O più veramente della parte anteriore del guscio, in quanto che stropicciando con essa del continuo la pietra, giungono con l'andar del tempo a logorarla, e ad aprirla? O dobbiam piuttosto

pensare che anzi che essere un corpo solido quello che fora, sia un corpo fluido, voglio dire un liquore stillante dalla bocca dei dattili, il quale essendo per ventura acido sciogla a guisa d' acqua forte le parti petrose che tocca? Ma si hanno veramente prove accertate di un tal liquore, e d' altronde gli scogli che ne vengon forati sono proporzionati ad esso liquore, cioè a dire sono calcari? I dattili forano le pietre per mangiarle, come per un fine analogo si bucano i legni dalle brume, e dai tarli? Ovvero que' fori a null' altro son destinati che a dar loro ricovero, e asilo, nutrendosi piuttosto di sostanze animali o vegetabili introdotte là dentro dall' onde del mare? Ma quelle petrose cellette mettono veramente all' esterna superficie dello scoglio, e comunicano col mare per via di qualche patente forellino? Si presume che i dattili sieno ermafroditi, per non trovarsene mai che un solo in ciascuna nicchia. Ma è egli dimostrato che queste nicchie non s' incontrano mai? Il sessualismo ha luogo in questi animali? Quanto con lungo volger degli anni sogliono essi internarsi nel sasso? Si trovano liberi i dattili dentro alle tane, oppure attaccati ad esse per qualche legame? Ed avendo io trovato che ogni dattilo per via di due appendici tendinose, che escono da lui, e s' attaccano robustamente a due fitti della celletta, non è quivi entro mai libero, che gli accadrà dunque se vengano a recidersi queste appendici? Che gli accadrà se venga tolto da quell' amato covile, e abbandonato all' acqua del mare? Si metterà egli di nuovo a forare la pietra? Nati appena che sono i dattili, si danno eglino subito a fabbricarsi le petrose cellette? Le soladi, e vive, e morte sono fosforiche. Si osserva egli lo stesso nei dattili?

Tali sono le questioni che sul mare io proponeva a me stesso, col fine di promuovere la storia fin qui appena cominciata di questi animali, le quali questioni io vorrei credere di avere in massima parte levate.

§. XV.

Torpedini,

La copia di questi pesci, che mi è riuscito di avere sul Mediterraneo, mi ha somministrata la desiderata opportunità di potere accrescere, ed anche rettificare le poche osservazioni, e sperienze ch' io pubblicai l' anno scorso, riguardanti l' elettrica scossa, e diversi altri fenomeni che tendono a perfezionare la naturale istoria di questi maravigliosi viventi (a). Qui però conforme il piano propostomi, altro non farò che accennarvi i principali risultati de' nuovi miei tentativi.

Il *Walsch* nella sua prima lettera scritta a *Franklin*, e relativa al presente soggetto, osserva che la torpedine volendo dare il colpo, accompagna lo sforzo che allora fa con una sensibile depressione degli occhi. Paruta essendomi rilevantissima tal circostanza, per venir essa a mostrare che la scossa è dipendente dalla volontà dell' animale, dirovi che non vi è quasi stata volta che provato abbia la scossa, che i miei occhi non sieno stati fisamente rivolti verso quelli di un tal pesce. Il segno marcato dal valente Fisico Inglese mi si è offerto con la maggiore incostanza. Qualche rara volta nel momento che si avea lo scuotimento, gli occhi s' internavano, è vero, nella loro cassa; ma altre volte per l' opposto ne uscivano: più frequentemente poi se ne rimanevano immobili. Cotesti occhi di forma tondeggiente, quantunque piccioli, risaltano assai bene dal capo. Così risaltanti venivano da me presi di mira fuori dell' acqua ora con l' occhio nudo ora con la lente nel tempo stesso che determinava le torpedini a darmi la scossa, ma per lo più nè quando io la sentiva, nè prima, nè dopo, non appariva in essi il più picciol moto, la più picciola mutazione.

E' stato da me altrove notato (b) che in una torpedine, finchè

(a) Questo primo Saggio di osservazioni, e sperienze intorno all' elettricità delle torpedini è contenuto nella lettera da me accennata sul principio della presente.

(b) L. c.

finchè si mantenne vigorosa, la sfoffa andò sempre congiunta ad una notevole agitazione del corpo. In queste mie nuove osservazioni ho pur veduta in qualche altra torpedine la stessa cosa. Ma neppur questo si può chiamare un segno o indizio universale e costante. Spesso egli accade che maneggiate si agitano nel modo stesso, ma innocentemente; e con pari frequenza addiviene altresì che restiam da esse colpiti, senza che sensibilmente si muovano.

Venivano da me astrette a starfi in maniera, che eziandio volendolo non potevano muoversi o agitarsi nè punto nè poco: eppure non lasciavan per questo di scuotermi potentemente la mano, e il braccio, e ciò a replicate riprese. La sfoffa dunque non ha nota alcuna o segnale del corpo, visibile almeno, che ce la possa indicare. E' però subordinata alla volontà, e quasi direi al capriccio dell' animale. Di due torpedini pescate ad un tempo, d' egual vigore, e grandezza, l' una talvolta per quanto sia brancicata, anzi punta, e ferita (non ostante che questi sieno, come vedremo, mezzi efficacissimi per conseguire le scosse) non farà mai che si determini a darne pur una: quando l' altra tosto che presa venga tra mani ne scaglia ben molte. Avverrà eziandio che taluna dopo l' essersi mostrata sorda a qualunque stimolo, qualche tempo appresso rimaneggiata, vibra il colpo.

La mano purchè d' un pelo sia distante dalla torpedine non soffre punto. Qui il contatto è assolutamente necessario. Sebbene soventemente neppur questo basta, ma vi si richieggon gli stimoli, anzi le ferite. Il più delle volte adunque le torpedini che semplicemente toccate non danno commozione di sorta, si obbligano a darla premendole con la mano, e stuzzicandole: e con tai mezzi si astringono pur qualche volta a vibrarla quelle di nuovo, che cessato aveano dopo l' essere state replicatamente tocche. Le punture in fine, e molto più i piccioli tagli fatti qua e là agli organi elettrici sono stimoli potentissimi per richiamare le scosse, in quelli eziandio tra nostri pesci che, per esser restati lungamente fuori dell' acqua, perduta hanno buona parte del lor vigore: e se la punta delle forbici o del coltello seguirà così a tormentarli, seguiranno eziandio le scosse, e queste fortissime, a farsi sentire. Proseguendo in tal guisa, e non interrottamente, a malmenar

gli organi, giunto sono a numerare 23 successive scosse, senza che l'ultime parute mi sieno meno violente delle prime. L'ammaccamento dei detti due organi fatto dalla gagliarda compression delle mani produce però il medesimo effetto, e questo effetto dura finchè non sieno considerabilmente schiacciati, che allora le scosse, prima alla mano moleste, si fanno picciolissime e quasi insensibili.

Sembra esser regola non soggetta a eccezioni che l'intensità della scossa sta in ragione diretta della grandezza dell'animale. Sta eziandio in ragione del vigore del medesimo, purchè quella non si ecciti per via di qualcuno dei soprammentovati stimoli, che allora un individuo estremamente il languidito può rendersi abile a dar colpi fortissimi. Se l'individuo però col ridonarlo al nativo elemento ripigli le forze primiere, che perdute avea col tenerlo fuori di esso, si ripristina in lui la naturale attitudine per le scosse.

Disi già altrove, ed altri detto lo avevano prima di me, che quelli che chiamati hanno *muscoli falcati* della torpedine, e più acconciamente *organi elettrici*, sono la sede verace della scossa. Ma questa è ella egualmente forte per tutto? Ho trovato che è massima, dove è massima la grossezza degli organi, e in conseguenza vicino alle branchie. Scema ella poi di forza in ragione che scema tale grossezza. Quindi al lembo dei medesimi è minima.

Se la faccia inferiore degli organi venga toccata da una mano, e la faccia superiore dall'altra, frequentemente la scossa o si prova soltanto per disopra, o provandosi ancor per disotto, quivi è minore. Se poi la faccia inferiore si fregghi o in altro modo s'irriti nel tempo che la superiore solamente si tocca, la prima ad esclusione della seconda suol dare la scossa (*a*). In entrambi i casi però succedono delle irregolarità, delle apparenti stranezze che crederò degne di riferire nella mia Opera. Quando poi la scossa si ottiene da ambedue le faccie, sentesi sempre nel medesimo punto di tempo.

Ma qui cadevano due ricerche, a mio avviso, importantissime. Si ha la scossa, toccando una sola faccia? Toccando

(*a*) Per faccia inferiore s'intende faccia superiore quella che corrisponde quella che corrisponde al petto, e per alla schiena.

contemporaneamente i due organi, succede egli che la scossa si provi da un solo? Quanto al primo, io rispondo affermativamente: soltanto aggiugnerò che la scossa lanciata da una sola faccia suole esser più debole, che quando lanciata viene da due. Per conto poi del secondo, o si tocchino i due organi in una sola faccia, o in tutte e due, ordinariamente la scossa sembra spiccarli egualmente, e nel tempo stesso dall'uno e dall'altro. Pure v'ha delle volte, e queste non tanto rarissime, che nel tempo che un organo agisce, l'altro rimane ozioso. Ciò è stato replicatamente da me provato con la palma della mano spiegata su la faccia superiore dei due organi, ma l'ho ancora con maggior precisione sperimentato, toccando nella medesima faccia un organo col pollice, e l'altro organo con l'indice della stessa mano, poichè mi si comunicava la scossa ad un dito, senza che si comunicasse punto all'altro. E ciò non di rado mi è accaduto, se irritando un organo, non facea che contemporaneamente toccar l'altro, quali che il primo con la scossa cercasse di vendicarsi, il che non facevali dal secondo, per non essere stato punto offeso.

I risultati fin qui menzionati partono da tentativi quasi tutti instituiti su le torpedini lasciate nell'acqua. Dirovvi però che i medesimi sono stati da me ripetuti nell'aria, senza che trovato vi abbia altro divario, fuorchè qui le scosse erano più gagliarde.

Udito che avete gli adottati risultati, piacciavi di sentire anche i seguenti. Sono relativi a torpedini cimentate tutte nell'aria. Se essendo io isolato toccava in una sola faccia una torpedine non isolata, leggerissima era la scossa ch'io ne soffriva, ma questa era fortissima, toccando entrambe le faccie. Nè più nè meno accadeva, se oltre l'essere isolato io, lo era pur la torpedine. La leggiera scossa però in ambi i casi provata avea luogo soltanto, vigorosissimo essendo il pesce. Diversamente più non si sentiva, e allora per provare la scossa mi era d'uopo contemporaneamente l'una e l'altra faccia toccare. Che se questo circolo io veniva ad allungarlo mediante un altr'uomo, egli pure isolato, il quale con una mano toccasse una faccia della torpedine, nel tempo ch'io l'altra faccia toccava, tutti e due sentivamo la scossa non

folo alle mani toccanti l' animale, ma all' altre due insieme intrecciate per l' allungamento del circolo . Nel caso poi dell' isolamento di me, e della torpedine, più d' una volta mi è accaduto, che toccando con due dita della stessa mano i due organi alla medesima faccia, io qui pure provava la scossa da un organo senza provarla dall' altro . Questa scossa poi, che era assai piccola, non oltrepassava il dito che la provava .

Se i fatti fin qui allegati provano bastantemente, che la virtù dolorifica dei nostri pesci parte da un principio elettrico, i seguenti mi sembrano atti a persuaderlo anche di più . Costesta virtù non si è mai trasfusa alle mie mani, toccando il pesce per via d' un coibente, quale si è un corto cilindro di ceralacca . Ma si è bene trasfusa, valendomi di un deferente, voglio dire di una chiave, di un chiodo, o di altrettale corpo metallico . Questi due fatti diversi gli aveva prima di me osservati col medesimo esito il chiarissimo *Walsh*. L' ultimo fatto però che risguarda i corpi deferenti accorto io mi sono che bisogna intenderlo con le dovute limitazioni . Primieramente la scossa non è qui mai sì gagliarda, come toccando immediatamente il pesce . In secondo luogo perchè si abbia, è necessario che in sè sia fortissima : e però quasi sempre è nulla, toccando con qualche deferente le torpedini molto infiacchite . Uno sciugatojo, un reticello, un fazzoletto, ravvolgenti a più doppi il corpo della torpedine, tramandano la scossa alla mano, se sono bagnati: ma per nessun conto, se sono asciutti, non ostante che sieno di canape o di lino . Per l' opposto un velo d' olio d' oliva che copra le due faccie, oppur una degli organi elettrici, quantunque in sè coibente, non impedisce la scossa . Cotal fluido però in tal guisa assottigliato non la impedisce tampoco nella elettricità artificiale .

I risultati fin qui addotti sono a mio avviso i soli abili a mostrare la massima analogia tra i fenomeni elettrici e quello della torpedine, giacchè niun altro fenomeno ho io potuto trovare, che m' indichi il principio elettrico . Non cenno di scintilla nella più profonda oscurità, non istrepito di forza, non venticello, non attrazione, e repulsione di corpi leggieri, niuno indizio di carica nella boccia leidesè messa a contatto con la torpedine isolata e vibrante le scosse, niun

segnale di elettricismo in me isolato , e tenente tra le mani il pesce quando scagliava i colpi.

Veduto avete che le sperienze del primo mio scritto contrariavano a quelle del Sig. *Schilling* , volente che la calamita attragga le torpedini in quella guisa che tira a sè il ferro . Ripetute avendole assai volte , e con la maggior attenzione per via d' una calamita potentissima , che teneva attaccato un peso di 25 libbre , queste novelle esperienze non mi hanno mostrato niente di più delle prime . La calamita accostata ai nostri pesci , e posta ancora in contatto con loro , dava quel segno di attrazione che darebbe avvicinandola a un mattone o ad un legno . Vi dirò bene che per essere artificiale , aveva la possanza di tradurre al mio corpo la scossa elettrica .

Prima ch' io finisca di ragionarvi di queste scosse voglio con brevità trattenervi sopra alcune singolari novità atte ad accrescere la vostra attenzione . Nel citato mio scritto ragionando delle scosse elettriche , dico che nell' avvicinarsi il pesce alla morte si trasmutano queste in una continuata batteria di leggerissimi colpi , che finiscono col finir della vita dell' animale . Un simil fenomeno mi si è manifestato di nuovo , se non che perite le torpedini , mi sono accorto di un altro fenomeno più maraviglioso ancora e più strano . E questo è che la batteria quantunque in ordine all' esser dolorosetta alla mano , termini affatto col terminar della vita animale , seguita però per più ore ad averli alla maniera di un semplice polso . Se la mano adunque , morta affatto che sia la torpedine , premerà i suoi organi , sente un battito frequentissimo e regolare , simile a quello del cuore , e lo sente in tutta l' area degli organi , se non che in vicinanza delle branchie , cioè a dire dove sono essi più grossi , è più vigoroso . In altre parti poi della morta torpedine non si sente nulla . Il fenomeno è lo stesso , e dentro l' acqua , e fuori . Di più non viene esso a toglierli , recisi che sieno dalla torpedine gli organi . Dopo alcune ore da che è seguita la recisione , dura ancora la batteria , e trascorso poi ulterior tempo va a perdersi . La mano la sente con distinzione tanto nella faccia superiore , che nella inferiore . Se uno degli organi che pulsano spogliato venga della pelle che nella faccia superiore lo

copre, quasi di subito la batteria si sminuisce, poi si fa nulla. Accorto essendomi di queste particolarità in una torpedine, le ho verificate in cinque altre col medesimo successo. Perchè poi non si avesse a pensare, che qualche ingannatrice apparenza mi avesse imposto su di questo fatto, per accertarmene ho usato, come sentirete, le maggiori circospezioni, e cautele.

Ma se baste quella batteria, e per più ore continua ad averli negli organi staccati dalle torpedini morte, che accadrà in essi, staccati che sieno dalle vive?

Il tentativo era troppo curioso per non essere istituito. Comechè adunque ne vengano scelte di quelle, i cui organi sono prontissimi a scagliare le più valide scosse, queste scosse, ciò non ostante cessano subito che gli organi mediante il taglio rimangono separati dall'animale. La mano tuttavia, che allora li comprime, soffre da prima un informicolamento molto molesto, che poi a poco a poco va sminuendo, ridotto in ultimo a quella specie di polso o innocente batteria, che non finisce se non dopo qualche ora. Le torpedini così spogliate de' loro organi seguitano a vivere, ed a nuotare per qualche tempo; dal che apparisce che non sono essi di prima necessità alla vita; rendono poi inette alla scossa, ed era ben facile il prefagire che questo doveva succedere: che anzi private di un solo organo, non danno bene spesso neppur la scossa dall'altro. Siccome però talvolta avviene il contrario, così sempre più rimane dimostrato che ciascun organo da sè è dotato di questa virtù.

Tre gran tronchi nervosi riceve dentro di sè ogni organo. Che farà egli se uno degli organi si stacchi col taglio dal pesce per l'intera porzione dove mettono questi nervi, lasciando il rimanente dell'organo tuttavia unito al corpo? Anche questa prova mi parve degnissima d'esser tentata, l'esito della quale si fu la cessazion d'ogni scossa all'organo così offeso, non ostante che sottentrasse però quel formicolamento di sopra accennato.

Io dissi già che nell'atto che si ha la scossa gli organi soventemente rimangono immobili. Non facea però allora che premerli, che palparli. Trovandomi adesso in queste nuove esperienze ho voluto sottoporli a cimenti più forti. Sentire-

te in quante e quanto diverse maniere gli ho tormentati col tagliente metallo , per veder pure se l' elettrico colpo veniva preceduto o accompagnato da qualche tremito o commozione , o scuotimento o contrazione delle parti componenti gli organi : a far breve quale si era allora la material mutazione cui andavan soggetti cotesti organi . Nè ho lasciato di esplorarli per fino col microscopio ne' momenti che precedevano , che accompagnavano , e che seguivan la scossa . Ma debbo dirvi con illibato candore , che accorto mai non mi sono del più picciolo movimento di parti , se si eccettui quell' universale agitazione del corpo , non sempre però , come ho già detto , compagna fedele del colpo elettrico . Dirovvi di più che tormentati gli organi elettrici con diversi e potenti stimoli , non mi hanno manifestata quella proprietà che caratterizza il muscolo vivo .

Tali sono i risultati più principali di mie osservazioni relativi a questo straordinario fenomeno delle torpedini , riferbandomi poi nel mio libro a corredarli delle necessarie prove , come pure a trarne quelle teorie , che giudicherò più confacenti alla verità , e più proprie ad illustrare questo soggetto *Fisfologico-elettrico* .

Le massime fra le torpedini da me esaminate erano lunghe all' incirca 18 pollici , e larghe 8 . Le loro scosse quantunque istantanee mi erano alquanto tormentose , e si stendevano fino al petto . Quelle poi delle torpedini minori mi riuscivano meno incommode . Crederò di aver prove dirette per far vedere , che la scossa è quell' artificio che usano le torpedini per impadronirsi di que' pesci , che loro servono di cibo . Ho posto ogni studio per venire a lume de' loro andamenti , de' luoghi che sogliono abitare , e dove costumano occultarsi per aspettare al varco , e predare i pesci di gran lunga più vivi al moto , e più lesti di loro .

Il modo onde le torpedini propagano la specie è stato un altro oggetto non indifferente alle mie ricerche . Nella lettera già pubblicata mostrato aveva che le torpedini quantunque sieno vivipare , in quanto che partoriscono i feti , hanno però le uova come gli animali ovipari . E questa verità con le mie nuove osservazioni l' ho amplamente confermata . Qui vi aggiugneva che trovato avendo alcuni feti nell' utero di

una torpedine , si vedevano questi feti attaccati mediante il funicolo ombelicale alle interne pareti dell' utero . Mi accorgo adesso che questa proposizione vuole essere rettificata . Vero è che ulteriori esami mi hanno pur mostrato in qualche feto l' attaccamento di detto funicolo all' utero ; ma questo attaccamento è accidentale , in quanto che solendo gemere dall' utero un umore vischioso , in grazia di esso l' estremità del funicolo opposta all' altra , che si collega col feto , quivi rimane attaccata . Del rimanente il funicolo ombelicale , discese essendo le uova dall' ovaja nell' utero , si vede essere per una estremità attaccato all' uovo , o a dir meglio continuato con lui ; giacchè questa continuazione si pruova manifestissima . Detto funicolo costa di due cose , di un invoglio esteriore membranoso , e di un canale interno pur membranoso . Ora l' invoglio esteriore non è che una continuazione dell' esterna membrana dell' uovo , e il canale interno che una continuazione della membrana interna dell' uovo suddetto . Il funicolo poi dall' altra estremità è pure continuato col feto , in quanto che l' invoglio esteriore è una espansione o continuazione della pelle di lui , e il canale interno una continuazione dell' intestino . Ecco adunque come l' uovo , e il feto , mediante il funicolo ombelicale , sono tra loro continuati , o ciò che torna lo stesso , formano un tutto solo . Ma per le replicate mie osservazioni le uova delle torpedini esistono già nell' ovaja assai prima che fecondate sieno dal maschio , mentre quando dall' ovaja calano nell' utero le uova già mature , e della grossezza circa d' un rosso d' uovo di gallina , ad essa ovaja ne rimangono attaccate altre picciolissime e acerbe , destinate a maturare , e a propagare la specie il seguente anno ; e queste uova acerbe sono pure avvolte dalla medesima doppia membrana , che nelle mature fa un tutto col feto ; dunque i feti preesistono alla fecondazione delle femmine in questi animali . Ecco adunque nella presente scoperta un novello argomento dimostrativo della preesistenza dei germi . Il Barone *Hallero* avea mostrata tal preesistenza negli uccelli ; io in diversi anfibi ; e presentemente ho il compiacimento di mostrarla nelle torpedini ; ed è ben presumibile , che questo non sarà solo tra pesci , in cui verrà a palesarsi la medesima luminosa verità . Nel tempo che nell' utero appaiono

pariscono alcuni feti nel modo indicato, se ne veggono altri, che per essere più vicini al nascere hanno già confunta la sostanza tutta dell' uovo: ed è taluno di questi che col funicolo rimane qualche volta casualmente attaccato alle pareti dell' utero.

Finalmente l' anatomico esame degli organi elettrici non dovea per nessun conto essere ommesso. Vedendo però che per farlo come meritava, richiedeva una mano maestra, prevaluto io mi sono dell' opera d' un mio Amico, e Collega, spertissimo in Notomia, che con riconoscente animo nominerò, come pure due altri celebri miei Colleghi, che a questi delicati lavori anatomici favorito mi hanno d' intervenire. Veduto avete quanto intorno a questi organi era stato scoperto dal chiarissimo *Hunter* dietro alle tracce segnate dai due nostri Italiani, *Redi*, e *Lorenzini*, ma vedrete quante altre inaspettate novità si nascondevano dentro di essi, e qual magistero, qual arte spicca in queste singolarissime macchinette.

§. XVI.

Pungolo della Pastinaca.

Per affermazione degli antichi Naturalisti, ed anche di alcuni moderni, tra quali si annovera l' illustre *Linneo*, velenosissimo si è il pungolo, onde porta armata la coda questa specie di razza (*a*). Ed un tal sentimento è pure altamente radicato nella gente di mare, così che sarebbe più facile strappare la clava ad Ercole, che rimuoverla dal medesimo. Tenendo però dietro a questa persuasione del popolo, io ho veduto che suole appoggiarsi a fatti la massima parte dubbiosi ed incerti; nè mi sembrano più meritevoli d' essere ascoltati i Filosofi, per riferirsi quasi sempre ai racconti de' pescatori, senza avere mai verificati questi racconti con le proprie esperienze. Il Mediterraneo abbonda di pastinache. Frequentemente uscendo del golfo co' pescatori io ne vedeva diverse restar prigioniere nelle lor reti. Osservava il riserbo grande che

Tomo II.

O o o o

(*a*) *Raja Pastinaca*. Lin.

essi avevano nel maneggiarle, e la prontezza nel recidere ad esse il dentato pungolo osseo, e gettarlo in mare. Come adunque non doveva io accendermi in voglia di esaminar questo pungolo, creduto tanto velenoso, e di tentare con esso qualche esperimento, giacchè altri Fisici, a mia notizia, fatto non lo avevano prima di me? Sentirete adunque nel mio libro e la descrizione di quest' arma, che certamente per un tal pesce è terribile, e il modo con cui fa vibrarla, come altresì varj tentativi da me intrapresi con la medesima, facendo ferir più animali, sì a sangue freddo, che a sangue caldo, e sempre quando le pastinache eran vive. Sentirete pure che l' arma suddetta non ha niente di velenoso, e che tutto il male che cagiona, e che certamente nelle pastinache di gran corpo può essere considerabilissimo fino a produrre talvolta in noi stessi la morte, è un puro effetto della meccanica sua struttura, in grazia della quale penetra facilmente le carni, e volendo levarla, irreparabilmente le strazia. S' inganna dunque a partito il *Linneo* quando decanta il veleno di questo pungolo, a persuadere il quale, oltre al ricorrere ai vecchi filosofanti, e ai moderni, produce un genere non più inteso di pruove, cioè a dire l' autorità della Favola: *Caude aculeus venenatus Veteribus & Recentioribus, fato Ulyssis clarus*. Così egli nel suo Sistema della natura: e in altro luogo del medesimo libro afferma pure che detto aculeo è velenoso, come per lui è velenosa la torpedine; parlando però del qual ultimo pesce quanto il Naturalista di Upsal si allontani dal vero, credo di averlo a chiare note mostrato nella più volte citata mia lettera. Nel visitare internamente le pastinache ho pur trovato esser falso, ch' elleno corredate sieno di polmoni, siccome vuole lo stesso Autore, non avendo che le sole branchie per respirare. Questi errori del *Linneo*, ed alcuni altri nel decorso della presente lettera per me notati, mi si sono offerti, pensando a tutt' altro che a criticare un sì rinomato Naturalista. E lo stesso è stato di altri non pochi relativi ad altre produzioni marine, i quali errori, cadendo l' opportunità, non esiterò di palesare, parendomi che pel vantaggio della società delle lettere i falli degli uomini grandi non debbano esser taciuti, affinchè l' autorità di chi gli ha commessi non induca altri in errore.

§. XVII.

Miscellaneæ.

Animalucci infusorj marini. A quel modo che l'acque dolci, in cui vengono a macerarsi, ed a sciogliersi sostanze vegetabili ed animali, abbondano di questi microscopici viventi, ne abbondan pure le acque sulfugginose del mare. Que' siti singolarmente dove queste impaludano, e dove a motivo della poca profondità le piante subacquee si scompongono e periscono, formicolano di tai minuti animali. Il medesimo fenomeno succede nell'acqua marina rinchiusa ne' vasi, dove accade lo scioglimento delle sopraccennate sostanze. Ma quali sono le leggi naturali, cui soggiacciono gli animalletti infusorj del mare? Sono elleno le stesse che quelle degli animalucci infusorj dell'acque dolci? Questi ultimi moltiplicano la specie parte per division naturale del proprio corpo, parte perchè altri sono ovipari, altri vivipari (a). Come succede la moltiplicazione nei primi? In moltissime cose l'analogia per l'una parte, e per l'altra qui non poteva esser maggiore.

Vermi litofagi. Oltre all'immenso numero di animali grandi e piccioli, disseminato nell'acque del mare, i funghi, le arene, gli scogli, e le pietre subacquee ricettano pure una infinità di abitatori. Ho avuto bastante ozio per esaminarne diversi, ma sopra ogni altro intertenuto io mi sono su que' vermetti, che a guisa dei dattili forano le pietre, e vivono dentro di esse, massime per aver costoro fin qui sfuggita la diligenza, e lo studio degli osservatori.

Se la Luna abbia influenza sopra i Testacei, e i Crostacei. Parrebbe che il presente Problema più non meritasse i riflessi del filosofo, se quell'impero, che sembrava per sempre tolto a questo pianeta, sforzato non si fosse di farglielo riacquistare qualche dotto Moderno. Se però la Luna stendesse mai le sue leggi su i testacei, e i crostacei marini, bisognerà dire che gli osservati da me sono sudditi refrattarj.

O o o o ij

(a) Mieì *Opuscol. di Fis. Anim. e Veget.* Vol. I.

Passaggio de' Pesci , e qualità di quelli che si prendono al golfo , e nelle sue adjacenze . Anche questi due oggetti ho creduto meritevoli di considerazione; e siccome nel mio soggiorno colà io non poteva raccorre tutte le cognizioni di che abbisognava, così ho dovuto consultare i pescatori più sperimentati, quelli sopra tutto che paruti mi sono più veridici, come pure le poche persone fededegne del paese.

Fondi del mare , e se la superficie di questo si alza , o si abbassa . Notabile è l'osservazione del celebre *Donati*, che il fondo dell' Adriatico è rivestito d' una crosta della grossezza di molti piedi, formata di crostacei, e testacei, e di corpi polipiferi, mescolati alla terra, e all' arena, e in massima parte impietriti; dalla qual crosta egli deduce l' alzamento della superficie del mare in que' luoghi, quantunque poi di tale alzamento vengano assegnate da lui altre cagioni. Il fondo del golfo, come pur quello che è fuori delle sue bocche, non ha niente di simile, ma quasi per tutto è fangoso, anche nelle maggiori profondità di 300, e di 400 piedi, e questo fango è calcare. Ne ho prove sicurissime, come pure che a quelle profondità non nasce mai sul fondo un filo d' erba, nè altro vegetabile, non ostante che ne nascano moltissimi e diversissimi a profondità molto minori, come accade dentro del golfo. La poca influenza della solar luce in que' cupi fondi farebbe mai la cagione per cui sono sforniti di piante?

Ma se il tratto di mare da me esaminato è privo di quella crosta, neppure si hanno argomenti che quivi la superficie dell' acque alzata si sia, che anzi se ne hanno dei contrarj, per cui evidentemente apparisce, che il mare in qualche luogo si rimane alla medesima altezza, e in qualche altro continuamente si abbassa. Parlando adunque del golfo, delle tre isole ad esso contigue, la *Palmaria*, il *Tiro*, e il *picciol Tiro*, come pure di altre adjacenze (siti tutti circondati da scogli, e dove non metton torrenti, nè fiumi) io farovvi vedere per un bellissimo monumento da me scoperto, che quivi il mare si trova presentemente a quella medesima altezza, alla quale si trovava nove secoli fa. Favellando poi delle spiagge di Carrara, e di Massa, esposte a' più furiosi libeccj, non d' altro composte che di minute ghiaje, e di rena, e attraverso alle quali passano più torrenti, che vanno a scari-

carfi nel mare , quantunque tali spiagge sieno di poche miglia distanti dal golfo , pure del continuo si vanno discoprendo di più per l' incessante allontanamento del mare . E i tristi avanzi del Porto carrarese colà nel 1750 fondato , ed ora dal mare 475 piedi lontano , sono essi pure un incontrastabile monumento benchè recente di tale allontanamento non solo , ma dell' annua misura di esso . Per le sopra esposte circostanze diverse che accompagnano il golfo , e le spiagge di Massa , e di Carrara comprenderete facilmente la cagione per cui il mare ad onta degli anni conserva in un sito la medesima elevatezza , nel tempo che in altro sito si va del continuo abbassando .

Ed eccovi , illustre mio amico , per appagare in parte le dottissime vostre brame , un compendiato ragguaglio di quanto è stato da me osservato sul mare . Io non so se parlato avendovi quasi sempre di animali , e talvolta anche nuovi , farò stato da voi inteso tanto che basta per mancanza di figure ; le quali però non è già ch' io non avessi in pronto , per essere già state sotto i miei occhi dai vivi animali copiate per opera di un valente disegnatore , ma non essendo ancora incise non potrò produrle che nella pubblicazion del mio libro . Veduto avete che diversi di questi animali sono quegli stessi di cui ragionate nelle immortali vostre Opere . Se le mie giunte avessero la sorte d' esservi utili in qualche modo , stimerei vantaggiosamente ricompensate le fatiche da me sostenute sul mare . Pregovi intanto a volere scusare la soverchia lunghezza di questa mia prima lettera , nata dalla molteplicità delle cose che per ubbidire a' pregiati vostri comandi proposto mi era di dirvi . Farò d' essere molto più breve nella seconda , che risguarderà gli oggetti montani , e che avrò il piacere di scrivervi subito che le pubbliche mie incumbenze mi permetteranno di farlo .



M E M O R I A (*)

*Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti
in generale , e sopra quelli di Pietra-Mala in
particolare .*

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica
Sperimentale nell' Università di Pavia.

QUando nel 1776 ebbi scoperto che da tutti i fondi d'acqua stagnante o leggermente corrente si svolge una prodigiosa quantità di aria infiammabile , prodotta dalla macerazione e putrefazione delle sostanze vegetabili e animali , fui naturalmente condotto a pensare , che molti fenomeni naturali , tra i quali quello dei terreni e delle fontane ardenti , da altro non provenissero che da grandi ammassi di codest' aria infiammabile (a). Era troppo facile l'immaginare che potea trovarsi buona copia di tal aria già bella e formata in alcuni ricettacoli o cavità sotterranee , che riempiendosi , o per le pareti che si sprofondassero , o per qualche materia estranea portatavi dentro , obbligavano quell' aria a traspirare ed uscirne fuori in forma di getti attraverso le crepaccio e la terra secca , o attraverso l' acqua in forma di gorgogli. Io mi atteneva tanto più fortemente a questa opinione , quantochè alla possibilità della cosa , alla verosimiglianza di una spiegazione così facile e naturale aggiugnevasi una imitazione non lontana del fenomeno , a cui io era giunto ; sendo riuscito ad eccitare a talento sulla superficie delle acque stagnanti simile infiammazione mediante il fruga-

(*) Questa Memoria fu dall' autore scritta in francese , e dal medesimo recitata nell' Aprile del 1782 in una pubblica adunanza di una Società letteraria chiamata *Musée di Parigi* , di

cui è Presidente il Sig. *Court de Gibelin* celebre per la sua opera *Le Monde Primitif*.

(a) *Lettere sull' Aria infiammabile nativa delle paludi*. Milano 1777.

re sul fondo, e rimescolare la melma ad effetto di snidarne l'aria infiammabile: il che fatto, non aveva che a presentare un candelino o un folsanello acceso al luogo dove nasceva il maggior bollicamento cagionato dalle gallozzole d'aria che spiccate dal fondo venivano a crepare alla superficie dell'acqua, per far tosto forgere una fiamma che spandeasi per una estensione considerabile lambendo l'acqua medesima. Questa fiamma era di colore azzurro, e continuava ad ardere così lambente e ondeggiante più o men tempo. Un fenomeno pressò a poco eguale avea luogo sopra le terre impregnate d'aria infiammabile. Io sceglieva a tal oggetto un terrenofangoso confinante coll'acqua di uno stagno, un terreno che fosse anzi stato coperto lungo tempo dall'acqua medesima, e abbandonato da essa e rimatto in secco poco innanzi, cui andava colla mia canna foracchiando là ove era più molle e nericcio. A siffatti buchi accostando prontamente un zolfino acceso, la fiamma vi s'appiccava a un tratto, e parte vedea scendere fino a lambirne il fondo, parte lanciarsi in aria, massime ove io m'aggravassi col corpo, o battessi de' piedi sul terreno ad oggetto di spremere l'aria infiammabile in maggior copia.

Dopo tali sperimenti e prove felici, consultando diverse descrizioni, che erano state date dei terreni ardenti, e particolarmente quella inserita nel Giornale di Fisica dell'Ab. Rozier Tom. VI. Agosto 1775 pag. 224 intorno alla *Fontana ardente* del Delfinato (così chiamata impropriamente, poichè essa non è in niun modo una fontana, bensì un terreno ardente), vi riscontrai una perfetta conformità in tutto, salvo due sole circostanze: cioè, che cotai terreni non è stato di recente coperto dall'acqua; e che non è necessario di sconvolgerlo, o di scavarvi de' buchi col bastone per isprigionarne l'aria, la quale è tramandata spontaneamente da qualche ricettacolo sotterraneo, che quivi suppongo trovarsi. Per tutto il resto i fenomeni sono assolutamente i medesimi, e le circostanze son tali, ch'egli è impossibile il suppor ivi la presenza della nafta o petrolio, a cui si attribuivano comunemente le fiamme de' terreni, e delle fontane ardenti. Meno poi si potrebbe attribuire il fenomeno a qualsivoglia altro bitume. Non resta dunque che l'aria infiammabile, che pro-

dur possa tali apparenze; e l'Autore della descrizione citata ce lo dà egli medesimo a divedere assai chiaramente, e ci conduce a ravvisare tal aria nelle modificazioni, negli accidenti, e nei moti che ci dipinge di coteste fiamme, benchè non parli nè faccia pur cenno nel suo scritto di aria infiammabile, l'esistenza della quale, non che l'indole e la natura di essa, dobbiam credere che gli fosse ancora ignota. Se conosciuto avesse tal aria, non sarebbe ito a cercar altro: certo almeno non sarebbe ricorso ad una specie di *piroforo*, prodotto non sa neppur egli come. Il Sig. di *Fontenelle* paragonava questo terreno a un piccolo vulcano: senza fondamento però; giacchè alcun vestigio non vi si è potuto trovare.

In mezzo a tante insufficienti opinioni un antico Autore mi si presenta, il quale si è molto accostato alla verità. Questi è un certo *Dieulamant* ingegnere a Grenoble, che scriveva ha quasi un secolo, il quale attribuisce il fenomeno a un vapore infiammabile che trapela dalla terra, dicendo di non aver trovato nulla nè sulla superficie, nè in seno alla terra medesima, che possa produrre e alimentare le fiamme. Il Sig. di *Montigny* in una Memoria manuscritta, di cui Mr. *Guetard* ci ha dato un estratto nelle sue opere, va più innanzi ancora: egli giunge perfino a dire, che il vapore infiammabile, il quale si fa strada attraverso il terreno di cui si tratta, è simile a quel vapore prodotto dalla dissoluzione del ferro nell'acido vitriolico, che s'accende coll'acostare la fiamma d'una candela alla bocca del vaso. Dal che si fa a congetturare che succeda qualche cosa di simile sotto il detto terreno, mercè l'azione dell'acido vitriolico sopra delle piriti ferrugginose. Egli avrebbe toccato il segno, sostituendo solamente la parola *aria* o *gas* a quella di vapore: ma la differenza solenne tra i vapori propriamente detti e i fluidi aeriformi non era molto nota a quel tempo. Oltre di ciò tra le arie infiammabili medesime conveniva far distinzione, ed attaccarsi, anzichè all'aria infiammabile de' minerali, a quell'altra specie che si produce dalla macerazione e scomposizione delle sostanze vegetabili e animali: ma questa origine dell'aria infiammabile era allora sconosciuta affatto; e sol dopo la

ma scoperta si può dire che si sia resa veramente palese (a).

Ho accennato che la così detta *Fontana ardente* del Delfinato non è altrimenti una fontana, ma un terreno ardente. Vi è però tutta l'apparenza che fosse in altri tempi ricoperto quel terreno dall'acqua, la di cui superficie gorgogliante prendeva fiamma all'accostarle qualivisia altra fiammella. Ciò rilevasi da quanto intorno a questo luogo ci riferiscono alcuni Autori antichi, tra gli altri S. *Agostino*, che non so dove ne parla. Molta probabilità ancora vi s'aggiunge dal vedere che esiste anche al dì d'oggi un ruscello che scorre vicino al luogo ove compajono le fiamme. Avremo occasione di far osservare quanto questa circostanza sia favorevole alla spiegazione ch'io pretendo di dare dei fenomeni di questo genere.

Non entrerò in più minuti dettagli, che poco servirebbero al proposito, contentandomi di avvertire chi li desiderasse, che questi unitamente alle opinioni degli Autori si troveranno nella descrizione della Francia che sta componendo il Sig. Avvocato *Beguillet*, di cui la parte che riguarda il Delfinato è già sotto il torchio (b).

Molti fuochi di simil genere si trovano in Italia, che sono stati descritti da diversi. Quelli di *Pietra-mala*, luogo situato sull'alto degli Appennini tra Bologna e Firenze, sono i più celebri e i più conosciuti. Tralasciando tutte le altre descrizioni, potrei attenermi a quella che leggesi nell'opera conosciutissima del Sig. *Ferber*, tradotta in francese e arricchita di belle note dal Sig. Barone *Dietrich* corrispondente dell'Accademia R. delle Scienze di Parigi (*Lettres sur la Mineralogie d'Italie, et sur divers autres objets de l'Histoire naturelle de l'Italie. Traduites de l'allemand* ecc. *Strasbourg* 1776.) potrei, dico, attenermi a questa descrizione, come la migliore e la più recente, che tanto vi troverei molte apparenze non equivocate, anzi tutti i più certi indizj del-

Tomo II.

Pppp

(a) Vegg. le citate *Lettere sull'Aria infiammabile nativa delle paludi*, singolarmente la Lett. III. pag. 64 e la nota sotto.

(b) Era sotto il torchio quell'anno 1782, or sarà uscita.

la mia aria infiammabile. Ma voglio più presto riportarmi a ciò che meco confessò l'istesso Baron *Dietrich* poco tempo dopo: quando cioè ebbi la sorte d'incontrarmi con lui in Argentina al principio d'autunno dell'anno 1777. Avendo egli letto poco prima la mia operetta *sull' aria infiammabile nativa delle paludi*, nella quale, non che trovarsi enunciate tali mie idee sopra i terreni e le fontane ardenti, viene di più riportata la descrizione di alcuni fenomeni di questo genere (a), non sì tosto ebbe verificate le mie principali sperienze (al qual oggetto ci portammo egli ed io in compagnia d'altre dotte persone a raccorre dell'aria infiammabile da certi fossi, e facemmo altresì la prova d'infiammarla sul luogo, cioè a fior d'acqua), ch'egli convenne in tutto meco, e dichiarò apertamente che i fuochi di *Pietra-mala* da lui e visitati e descritti provenir doveano da simil fonte, cioè da aria infiammabile della stessa specie; che in questo senso or vorrebbe che fosse preso il *vapore sotterraneo* di cui parla, non già per un' esalazione di nassa o petrolio, riflettendo massimamente ch'egli per quanto si studiasse, non avea potuto rinvenire in quel terreno alcun indizio di bitume (b); che altri ve lo aveano bene immaginato e supposto, ma solo per non trovar essi altra via di spiegare il fenomeno; imperocchè coloro, i quali finsero a piacimento una specie di vulcano, andarono ancor più lontani, secondo che pensa il Sig. *Dietrich*, dalla vera cagione: infatti niuna forma di cratere, niuna produzione vulcanica nel sito di cui si tratta.

(a) Vegg. Lett. II. pag. 20. e segg. nelle note.

(b) „ La terra bruna, di cui par-
 „ lammo, è sparfa su tutta la circon-
 „ ferenza del focolare di *Pietra-mala*.
 „ Parrebbe ch'ella contenesse qualche
 „ cosa di bituminoso; stantechè se col-
 „ la punta del bastone si move dol-
 „ cemente, e se ne tira fuori striscian-
 „ do un pezzo dal circuito ardente,
 „ le fiamme corrono appresso alla ter-
 „ ra pel tratto di un piede circa. Ma
 „ dall'esperienza, che ho fatto, sono
 „ persuaso che quest'effetto non pro-
 „ viene che da un resto di vapori con-

„ tenuti nella terra. Ho messo in una
 „ storta otto oncie di tal terra bruna;
 „ le ho dato un fuoco violentissimo;
 „ la terra è divenuta grigia, s'è riu-
 „ nita in piccole masse, e s'è indu-
 „ rita; ho trovato nel collo del reci-
 „ piente un sospetto di sublimato a-
 „ cido, e nel fondo di esso un poco
 „ di flemma, che sentiva decisamente
 „ l'acido marino. Questa terra non è
 „ dunque punto bituminosa, e gli ef-
 „ fetti non son dovuti che ai vapori
 „ sotterranei che s'infiammano „ *Die-*
trich Op. cit. pag. 421.

Il suffragio del *Baron Dietrich* mi fu , lo confesso , di un gran peso per confermarmi nell' opinione ch' io aveva sempre mantenuta dopo la mia scoperta dell' aria infiammabile nativa . Ad ogni modo per quanto persuaso io fossi della natura dei fuochi di *Pietra mala* , restavami tuttavia uno scrupolo , cioè che il piacere di far fare una bella comparfa alla mia aria infiammabile non forse mi seducesse ; ond' è ch' io non era contento , finchè non mi riuscisse di averne prove incontestabili e dirette . Altronde quand' anche io non avessi più bisogno di queste prove per finir di soddisfare me medesimo sopra tal punto , le vedeva necessarie a convincere gli altri , quelli singolarmente , che attaccati di troppo ai loro antichi principj , e alle idee cui non possono risolversi di abbandonare , nemici dichiarati di ogni novità , non si arrendono che all' ultima evidenza . Mi proposi adunque di fare sul luogo le osservazioni proprie non solo ad iscoprire la presenza dell' aria infiammabile là dove trovati il terreno ardente di *Pietra-mala* , in quella copia ch' è richiesta alla produzione de' fenomeni che vi s' osservano ; ma ad accertare ben anche di tal aria il continuo sgorgo attraverso la terra , in un colle circostanze che lo promuovono . Io intrapresi queste osservazioni verso la metà di Settembre del 1780 in occasione di un piccol viaggio che feci in Toscana ; e vado ad esporle e sottometerle al giudizio del pubblico : esse sono in piccol numero , ma altrettanto , a mio credere , decisive .

Poco ho a dire dell' ispezione del locale , e delle prime apparenze del fenomeno . *Pietra-mala* è un piccol villaggio , che si truova alla più grande altezza della strada che mette da Bologna a Firenze . Alla distanza di poco più d' un mezzo miglio al disotto del villaggio sul pendio del monte evvi un terreno , come un picciol campo , il quale mirato anche da lungi vedesi coperto da fiamme , che forgono all' altezza d' alcuni piedi , fiamme leggere , ondegianti , e di color ceruleo la notte , come s' accordano tutti a riferire gli abitanti di quelle vicinanze : in tempo di chiaro giorno queste fiamme non si scorgono che assai dappresso , e appajono assai tenui e rossigne . Nel che può ravvisarsi di già una perfetta somiglianza colla fiamma della mia aria infiammabile nativa delle paludi . Quando io mi trasferj sul luogo il giorno era così chia-

ro, e il terreno illuminato dal Sole, che punto quasi non si vedeano le fiamme: il calore quello era piuttosto che ne avvertiva all'accostarvisi che un faceva. Io mi trovava insieme a due miei compagni di viaggio (a) e un paesano per guida, il quale rimarcar ci faceva ognuna di tali vampe, mediante il gettare qua e là ne' luoghi particolarmente infiammati, che sono come altrettanti focolari distinti un dall'altro, de' fascetti di paglia, che vi prendean fuoco all'istante. Del rimanente essendo noi molto curiosi, e non lasciando di tentare e frugare per ogni dove, non andò guari che tutti avemmo fissati questi sulò, o getti di fiamme distinti, quali più e quali men grandi, che non erano poi assolutamente invisibili; perocchè se in qualche sito ci avvenne di abbruciar prima un poco le scarpe che ci accorgessimo della fiamma ivi esistente, questa in appresso, ponendovi occhio più attento, non ci sfuggiva. Cotali fiamme sono qua e là sparse e disseminate per l'estensione di poche tese d'un terreno che resta scoperto, piuttosto leggero ed arido, e un po' sassoso; ed occupano segnatamente i luoghi, dove questo si trova visibilmente più raro e secco. Talvolta cambian di luogo, ma più sovente di volume, quando in larghezza, e quando in altezza; qui guadagnan terreno, e si riuniscono più fiamme insieme, là si ritirano e si disgiungono: si può anzi sopprimerne alcune, ed ingrandirne altre a talento. Altro non vi vuole per fare sparire le più piccole, che un forte soffio; e per quelle che sono più larghe, basta versarvi tanto d'acqua, che ne ricopra tutta l'estensione; oppure accumular ivi della terra, e rincalzarla e comprimerla tanto, che più non dia facile passaggio all'aria infiammabile ch'è sotto. Quest'aria allora risospinta forte in maggior copia dagli altri pertugi vicini, ond'è che da questi come focolari si levano le fiamme più alto: insomma a misura che si sopprimono alcuni de' getti, crescono in forza gli altri. Io mi trattenni lungo tempo a ripetere e variare tali prove, prendendomi

(a) Il Sig. Marchese *Torelli* Patri- Re Assistente al gabinetto di Fisica del-
zio Pavese Cavaliere di S. Stefano di la R. I. Università di Pavia.
Toscana, e il Sig. Ab. Don *Giuseppe*

Soprattutto piacere di far salire le fiamme più alto a varie riprese, mediante il battere de' piedi, e l'aggravarmi sul terreno attorno ad alcuno di tali getti; parendomi che questo solo bastar potesse a render sensibile l'esistenza di quel serbatoio d'aria infiammabile, che quivi ho supposto; la qual aria se dalle interne cavità già si fa strada da sè, e trapela spontaneamente per il terren poroso, è ben naturale che sgorgi assai più copiosamente sopravvenendo quell'esterna pressione, che ajuta a spremersela fuore: non altrimenti che noi la spremiamo nelle nostre sperienze da una vescica o da un otre riempitone, giusto per offrirne lo spettacolo di simili getti di fiamma.

Non voglio lasciare di far osservare, per compiere in tutte le sue parti il parallelo tra l'aria infiammabile e le fiamme di *Pietra-mala*, che ogni qual volta una di queste fiamme, essendosi per qualsivoglia maniera spenta del tutto, viene a riaccendersi, ciò non fa mai senza quella specie di esplosione, che accompagna l'accendimento dell'aria nostra infiammabile, e che è tutta propria di lei. Questa circostanza, di cui ha fatto caso il Barone *Dietrich*, avrebbe dovuto fin d'allora fargli sovvenire dell'aria infiammabile. „ Le piogge e „ le nevi, dic'egli, non impediscono tali fiamme di bruciare; solamente di gran colpi di vento sono capaci di spegnerle; però per un momento. Se si coglie quest'istante per accostarvi un corpo ardente, le fiamme ricompajono *con una specie d'esplosione*, e si comunicano a tutta la circonferenza, come ad una striscia di polvere „. (Op. cit. pag. 420.)

Si avrà forse difficoltà a persuadersi, che esista sotto questo terreno una provvisione d'aria infiammabile così grande, da poter somministrare alimento pereenne all'ardere di tante fiamme. Ma se vogliam supporre che si trovasse altre volte in quel luogo una gran palude, la quale sia rimasta in seguito di tempo sepolta, per uno di quelli accidenti che è facile immaginarsi (a), farà anche facile intendere come le so-

Pppp iij

(a) Favorisce non poco questa supposizione ciò che dice il Sig. *Ferber*. „ Il sito, da cui le fiamme di *Pietra-* „ *mala* fortono, è coperto di terra, e

„ di pietre staccate talcose, argillo- „ se, e marnose, come se vi fosse suc- „ ceduta una sovversione violenta „ Op. cit. pag. 421. e segg.

stanze vegetabili e animali continuando a decomporli vi abbian colà entro lasciato il prodotto della lor aria infiammabile, la quale, ritenuta in quella sotterranea prigione, da cui esala sol poco a poco trapelando dal terreno, non sia peranco tutta consumata: se si suppone, ciò che è ancora più verisimile, che una quantità di materie putrescenti venga continuamente condotta in quella vasta cavità sotterranea (che in ogni conto dobbiam ammettere che vi sia) da alcuni ruscelli d' acqua carichi di sfoglie vegetabili ed animali, i quali vi scolino come in una fogna, niente più vi mancherà per la formazione di quel magazzino d' aria infiammabile, ampio, inesaurito, di cui abbiain bisogno. Del resto l' aria infiammabile potrebbe eziandio venir fornita da qualcuna di quelle mine, che ne abbondano, come son le mine di carbon fossile. Ma io amo meglio di credere, che quest' aria sia della stessa specie che ho scoperto ne' fondi delle acque stagnanti e sporche, per la ragione primieramente che cotesta è più comune, e si produce in molto maggior quantità dell' altre, e dappertutto; in secondo luogo perchè la maniera di ardere della nostr' aria infiammabile paludosa è simile in tutto a quella delle fiamme di *Pietra-mala*.

Se non che qual bisogno abbiaino di ricorrere a supposizioni per concepire la possibilità di questa grande raccolta d' aria infiammabile sotterra ne' contorni di *Pietra-mala*, quando l' esistenza sua ci viene provata, e resa palpabile da una quantità prodigiosa di bolle di cotest' aria che scappano attraverso l' acqua di una fontana la qual si truova a picciola distanza dal terreno ardente (a)? Si può facilmente raccogliere di tal aria, che cagiona un grande ribollimento nell' acqua per molte gallozzole, che vengono a rompersi alla sua superficie, adattando un imbuto al collo d' una caraffa rivolta colla bocca nell' acqua, e piena ella stessa di acqua; come ho insegna-

(a) „ Rimontando un poco la montagna, e sul medesimo pendio si vede un altro pezzo di terreno ardente più grande e più esteso che il primo. Più in su, all' estremità della valle vi ha un piccolo stagno, chia-

„ mato *Acqua buja*; le di cui acque, ancorchè fredde, sembrano bollire costantemente „ *Ferber* p. 123, il quale suppone anche qui del petrolio, e non sospetta neppure l'aria infiammabile, che si vede e si tocca.

to per cavare l'aria infiammabile dei fossi (a): si può, dico, raccogliere dell' aria di quella fontana, trasportarla entro a bottiglie convenientemente turate, ed abbruciarla poi a bell'agio quando un vuole; e si può, se più piace, infiammarla sulla superficie medesima dell' acqua, (b) onde sgorga: ciò che ne fa una vera *fontana ardente*. Or poichè da questa fontana non corre che un picciolo tratto al terreno ardente, pare che non vi sia, nè esser vi possa alcun ragionevole dubbio intorno all' identità del fenomeno. Nulla di meno passiamo più innanzi, e cerchiamo delle prove più dirette e conclusive.

Ad oggetto di rendere sensibile il da me supposto sgorgo di aria infiammabile dal terreno in questione, m' avvisai di spargere delle pagliuzze ed altri corpi leggeri là dove la terra mi pareva più leggera e sollevata, segnatamente in que' luoghi da cui aveva un momento prima a bella posta spazzata via con forte soffio la fiamma: con che ebbi la soddisfazione di vedere che coteste paglie ed altri minuzzoli venivano commossi, e fatti saltellare dal soffio d' aria (e da che altro mai?) che trapelava dal terreno. Non mi restava più per compimento di prova, che di raccogliere di quest' aria medesima, e vedere se era veramente infiammabile, al par di quell' altra che scappa in forma di bolle dalla vicina fontana, di cui s' è parlato poc' anzi. A questo fine feci scavare delle fossatelle ne' luoghi precisamente occupati da fiamme, e ricolmate quelle d' acqua, con che veniva (com' è naturale) soffocata la fiamma; si videro, com' io l' avea predetto, salire dal fondo a galla dell' acqua copiose bolle d' aria; le quali per rendere più grosse e più frequenti, mi misi a frugare col bastone sott' acqua sommovendo la terra, intanto che per raccogliere di tal aria teneva rivolta colla bocca nell' acqua una bottiglia piena d' acqua con adattato al modo solito l' imbuto. Con simile artificio mi riuscì di trasportare una quantità sufficiente di cotest' aria al nostro albergo di

(a) Lett. full' Aria infiam. ecc.

(b) E' dunque l' aria infiammabile a cui si dà fuoco, e che leva fiamma sulla superficie di quell' acqua, un' a-

ria infiammabile che ognuno può raccogliere; non è il sognato petrolio, che nè si scorge, nè alcuno ha raccolto mai in quel sito.

Pietra-mala, dove feci la prova d' infiammarla in presenza di quelle stesse persone, che erano state meco sul luogo, che mi avevano ajutato a raccoglierla, e che avevano assistito alle altre sperienze. La fiamma di quest' aria si mostrò azzurra e lambente, tutt' affatto simile a quella dell' aria infiammabile delle paludi, e della fontana, di cui abbiamo parlato.

Non si può dunque a meno di riconoscere nel fenomeno di *Pietra-mala* un' aria infiammabile, che già bella e formata si contiene in un vasto ricettacolo sotterraneo, da cui esce continuamente, facendosi passaggio per alcune crepacce, e pertugi invinibili, ossia attraverso la terra medesima rara e porosa. Tutt' al più vi si potrebbe associare un' altra causa, e attribuire una parte solamente del fenomeno all' aria infiammabile, la di cui esistenza in quel luogo è ora dimostrata, e un' altra parte al supposto petrolio, o ad altra sorta di bitume; ma bisognerebbe bene essere innamorato morto di questo petrolio o bitume, per volerlo a tutti i patti tirar in campo, quando non è mai stato possibile di scoprirvelo, e che altronde non v' è bisogno alcuno di questo soccorso. No, lo ripeto, non v' è il minimo indizio di bitume, nè fluido nè concreto, sparso sopra il nostro terreno ardente: una terra arida, buona parte nericcia, mista a sassi piccioli e grandi, e pochi rimasugli di vegetabili sparsi sulla superficie, ecco tutto quello che vi si ritrova. Si è fatto caso da alcuni dell' odore di questa terra nericcia, che avean raccolto per esaminarla; ma è facile riconoscere che non è altro che un odore empireumatico, che ha contratto essa terra arrostita dalla fiamma ivi esistente; come succederebbe d' ogni terra, che si sottoponesse alla medesima abbruciatura, salvo che fosse del tutto magra e sabbiosa. Nè maggior caso vuol farsi di quell' odore, che, al dir di taluno, dal luogo di quelle fiamme si spande intorno. Il Sig. *Dietrich* nel passo sopraccitato dopo aver detto che per prova ha trovato che quella terra *non è punto bituminosa*, soggiunge „ si dee presumere, che l' odor „ grato ma leggero, che si sente quando si è sotto il vento „ delle fiamme di *Pietra-mala*, che alcuni han preso per un „ odore elettrico, ed altri per quello del belzuino, e che io „ non ho potuto determinare sul luogo, non è altro che „ quello dell' acido marino, la di cui presenza è provata dal-
„ la

„ la mia speranza „. Io crederei che fosse l' odore stesso dell' aria infiammabile, che quando abbrugia è leggere e non ingrato, alterato, se si vuole, dai vapori di detto acido marino, o d' altre sostanze volatili che per avventura vi s' incontrino. Chechè ne sia di tali circostanze puramente accidentali, quando le circostanze più essenziali che accompagnano il fenomeno dei terreni ardenti, i sintomi principali di questi fuochi convengono interamente con quel che ci offre l' aria infiammabile nativa, quando insomma la rassomiglianza è perfetta quanto mai può essere, costretti noi già a ravvisare nell' identità degli effetti l' identità della causa, dobbiamo di questa sola essere contenti, senza andar a cercare altre cause concomitanti superflue non che immaginarie.

Tra questi sintomi uno ve n' ha, ch' io non ho ancora indicato, tanto più rimarcabile, quantochè stando al mio supposto riceve una spiegazione tutta facile e naturale; e all' incontro non può averla che difficilissima e forzata in ogn' altra supposizione. Parlo delle vicende, a cui vanno sottoposte per le piogge e la siccità le fiamme di *Pietra-mala*, e in generale quelle di tutti i terreni e fontane ardenti. I pratici di que' luoghi ci assicurano, che queste fiamme crescono di molto colle piogge. Or non si fa comprendere in qual maniera le piogge potrebbero aumentare il bitume o il petrolio alla superficie di questi terreni; meno poi come potrebbero favorire la combustione, e l' alzata delle fiamme: pare anzi più naturale che dovessero portarsi via tali materie, diluirle, e lavarne il terreno. All' incontro attenendoci alla nostra spiegazione, ben si vede che queste piogge medesime possono, anzi devono per via dello scolo delle lor acque nelle cavità sotterranee, ove io pongo il serbatojo dell' aria infiammabile, aumentare l' emissione di cotest' aria attraverso gli screpoli e la porosità del terreno. Per conseguenza quanto più copiosi saranno gli scoli d' acqua che penetrano là dentro, tanto maggior quantità di aria verrà costretta a dar luogo, e scappar fuori per le dette strade. Un' immagine noi abbiamo

di ciò nella mia *lucerna ad aria infiammabile* (a); perocchè a misura che si apre di più la chiave o robinet, per lasciar cadere un più grosso filo d'acqua dal recipiente superiore nell' inferiore pieno d'aria infiammabile, la fiamma, che esce del tubetto adattatovi, si fa più grande ed alta.

Terminerò questa Memoria con una breve descrizione d'un apparecchio, ch' io ho immaginato per reiterare simili sperienze a piacimento; poco parendomi l' esempio proposto della lucerna ad aria infiammabile, se non giungeva a rappresentare in altro modo, e con più perfetta imitazione le fiamme dei terreni ardenti. Ho dunque costrutta una grande cassa, che riempio d'aria infiammabile. Nella parte superiore, ossia coperchio, son praticati qua e là de' piccioli fori, e in qualche luogo sonovi dell' aperture più larghe con sopra fili di ferro incrocicchiati o ramatine adattate: il tutto però è ricoperto da grossa sabbia, pietruzze, festuche ecc. con a luogo a luogo dell' erba; per dargli così l' apparenza di un terreno naturale. Le cose in tal modo disposte, io versò dell' acqua con un innaffiatojo (per imitare così anche la pioggia) sopra un luogo di questo artificiale terreno, ove ho accomodato un canale che mette nell' interno del recipiente. Tosto che questo comincia a ricever acqua, l' aria infiammabile costretta a dar luogo scappa dai piccoli fori, e attraverso la sabbia e i mucchi di pietruzze onde son ricoperti: allora gettandovi un zolfino acceso, si alza una bella fiamma cerealea, che cresce o decresce a misura che la pioggia e i rivoletti che scorrono sono più abbondanti e portan più acqua

(a) E' stato stampato a Strasburgo un opuscolo col titolo *Description & usage de quelques lampes à air inflammable* 1780, dove l' autore, che è il Professore *Ehrmann*, attribuisce l' invenzione al Sig. *Fürstenberger* di Basilea; quando il vero si è, che avendo io il primo immaginato e costruito più d'una di tali lucerne, e ridottele a segno di servire d'*accendilume* fin dalla primavera del 1777, poco dopo cioè l' altra mia invenzione della *pistola ad aria infiammabile*, ne aveva mostrata l' idea nell' autunno

seguinte all' istesso Sig. *Fürstenberger* non solo, ma al Sig. *Barbier* di Strasburgo, e a diversi altri in occasione d' un viaggio che feci. Non parlo di que' molti, a cui già aveva mostrata tal macchina a Como e a Milano. Nel 1779 poi epoca anteriore ancora d' un anno alla pubblicazione dell' operetta del Sig. *Ehrmann*, ebbi occasione di mandare una di queste lucerne o accendilumi a Firenze per Mylord Principe di *Covurper*, a cui l' aveva già da un pezzo promessa.

nell' interno . Talvolta la fiamma si tien così bassa , che rimane nascosta tra i piccioli sassi , e negl' interstizj della sabbia , talmente che si terrebbe per estinta ; ma questa fiamma che ci cova sotto è pronta a forger alta e farsi vedere , tostochè si versi novella acqua e ne scorra pel canale nel ricettacolo in copia sufficiente . Non voglio lasciar di dire , che si possono ripetere sopra questo terreno ardente artificiale tutte le sperienze , che ho fatte sopra il terreno ardente naturale di *Pietra-mala* : si può sopprimere questa o quella fiamma , impedendo l' uscita all' aria infiammabile , o col bagnare e comprimere la terra in quel tal sito , o in altra maniera : si può , formandovi delle fossette e colmandole d' acqua , far nascere e il ribollimento di essa per le gallozzole di aria che vengono a galla , e gli altri fenomeni delle vere fontane ardenti ecc.

Ecco come sono riuscito a rappresentare le più comuni apparenze e gli accidenti delle fontane e dei terreni ardenti , seguendo le idee , che fin dappprincipio mi era formato dell' origine e natura di tai fuochi . Una sì perfetta rassomiglianza non dovrebbe lasciar luogo ad alcun dubbio , quand' anche non vi fossero tutte le prove dirette , che dimostrano l' esistenza dell' aria infiammabile stanziante sotto il terreno di *Pietra-mala* , e il continuo sgorgo ce ne fan vedere , e rendono per ogni maniera palpabile . E che si ricerca di più per una piena convinzione ? Posso dunque dire di aver bene accertata l' origine di un fenomeno bello e singolare , e di aver assegnata giustamente una delle parti all' aria infiammabile nativa sulla superficie della terra . Chi sa che un giorno non si verifichino anche le altre idee ch' io ho avventurate nelle mie Lettere sull' aria infiammabile (*a*) , riguardo all' influsso e giuoco che può avere tal aria al di sopra della terra nelle differenti regioni dell' atmosfera , concorrendo coll' elettricità alle meteore ignee ? Queste idee non farà inutile l' averle arrischiate , se serviranno almeno a portar più lungi le osservazioni e le sperienze .

Qqqq ij

S A G G I O

*Di una nuova Teoria del movimento delle
acque pei Fiumi, e*

N U O V O M E T O D O

*Per trovare colla sperienza la quantità dell' acqua
corrente per un fiume.*

Del Sig. TEODORO BONATI Matematico di Ferrara.

*Saggio di una nuova teoria del movimento delle
acque pei fiumi.*

1. **I**L P. *Castelli* Cassinese fu quegli, che nel 1640 gettò il primo fondamento della Scienza de' fiumi con quel suo teorema, che qualora un fiume non cresce, nè cala, e che in conseguenza si trova in uno *stato di permanenza*, per ogni sua sezione passa una egual copia di acqua in un tempo stesso, qualunque siali l'ineguaglianza di quelle sezioni. Stabili indi, che le velocità dell' acqua nei fiumi fossero in ragione delle altezze dell' acqua sopra il fondo, ma col solo fondamento di alcune sue sperienze fatte in piccolo con canali artefatti; e si vede che intese di velocità medie, senza cercare se la velocità sia la medesima dalla superficie al fondo, oppure se cresca, o scemi, e con qual legge.

2. *Domenico Guglielmini* fece delle sperienze ora con un vaso parallelepipedo mantenuto sempre pieno di acqua mentre questa usciva per un foro fatto in una sponda del vaso, ed ora con canali artefatti. Le prime davano, che le velocità pel foro fossero in ragione sudduplicata delle altezze dell' acqua sopra il foro. Nelle seconde poi le velocità recedettero non poco sì dalla ragione semplice delle altezze, che dalla ragione sudduplicata delle altezze suddette, come si vede nella Prefazione al trattato *De mensura aquarum fluentium* stampato in Ginevra l'anno 1719. Trattandosi di determinare le velocità dell' acqua pei fiumi, pareva veramente che le se-

conde, perchè fatte con canali, che sono più analoghi ai fiumi che un vaso parallelepipedo, fossero da preferirsi alle prime: eppure queste non le descrisse nemmeno, e trascurandole affatto si attenne alle prime; ed ecco in compendio il suo sistema.

3. La vasca QZA (fig. 1.) somministri incessantemente acqua al fiume del fondo inclinato ODE . Si prolunghi la linea di questo fino all'incontro della superficie dell'acqua della vasca, cioè fino al punto A da denominarsi *origine del fiume*, e tirata l'orizzontale AB , e la BD normale al fondo, sia DC l'altezza dell'acqua della sezione in D . L'Autore nel lib. 2. prop. 2., e seguenti stabilisce, che le velocità dell'acqua per quella sezione (prescindendo dalle resistenze) debbano essere le medesime, che avrebbe l'acqua uscendo liberamente per un'apertura eguale alla detta sezione, e fatta nella sponda BD di un vaso BDA mantenuto pieno di acqua fino in B , le quali velocità nei punti D , G , C , ecc. sarebbero eguali alle velocità di un grave caduto dalle altezze dell'acqua insistente, o sia come le radici quadrate delle altezze DI , GL , CM ; e però esprimibili colle semiordinate corrispondenti DE , GH , CF di una parabola conica BFE ; e ciò perchè egli si persuadeva, che ogni particella di acqua giunta a qualunque punto G della sezione DC debba avere la velocità di un corpo solido disceso liberamente sopra un piano liscio, ed inclinato dall'origine A del fiume fino in G , la quale velocità si trova appunto eguale a quella del medesimo corpo allorchè fosse piombato dall'altezza LG . Sopra questo fondamento travagliò tutto quel trattato pieno di proposizioni assai belle, e che reggendo il fondamento farebbero estremamente utili.

4. Se l'acqua in CD colle velocità CF , GH , ecc. perdesse la sua gravità, allora sì che potrei concepire come l'acqua inferiore alla sezione CD , o sia l'acqua CDK , non fosse per fare veruna remora all'altra, che passar deve successivamente per CD , perchè supponendo inoltre l'acqua fluidissima, ed il fondo, e le sponde affatto lisce, vedrei come ogni particella G , ed ogni altra componente un filamento GV in virtù della propria inerzia potrebbe ritenere la velocità GH , ch'ebbe in G , e la stessa direzione GV , con che non potrebbe opporsi in veruna maniera alle altre particelle,

che succedono in G colla medesima velocità, e direzione. Ma subito ch' io considero, che l' acqua CDK è grave, tosto io vedo che gli strati superiori premono gl' inferiori, e che premendoli tendono a schiacciarli, ed inducono in essi un conato di spandersi a tutte le bande, ed in conseguenza anche all' indietro verso l' origine del fiume, tutto che si trovi in moto verso la foce; il qual conato all' indietro dell' acqua CDK dee fare una remora al movimento dell' acqua, che succede in CD , onde questa non potrà altrimenti muoversi per CD con quella stessa libertà, colla quale uscirebbe dall' apertura libera fatta nella sponda del vaso BDA , come richiederebbe il sistema dell' Autore.

5. Egli è poi certo, che questa teoria non ha avuto luogo nemmeno prossimamente nè nelle accennate sperienze del *Castelli*, le quali furono ripetute da Gio. Domenico *Cassini* in Roma, e con lo stesso evento; nè lo ha avuto in quelle del *Guglielmini* stesso, tutto che sì quelle, che queste sieno state fatte con canali artefatti, cioè retti, e col fondo, e colle sponde lisce, e nei quali perciò le resistenze, che possono nascere dalle scabrezze, ed ineguaglianze dell' alveo, devono esser montate a poco.

6. Meno poi si verifica la stessa teoria nei fiumi naturali, perchè questi attese le resistenze, che derivano dalle tortuosità, ed ineguaglianze degli alvei, sono ben lontani dall' avere la velocità richiesta dalla teoria del *Guglielmini*, cioè quella che compete alle discese delle loro acque, le quali perchè provenienti da origini ben alte dovrebbero avere delle velocità sorprendenti e tali, che nessun fiume sarebbe navigabile.

7. Nè sussiste punto l' applicazione, che fa di questa teoria il P. *Grandi* al caso delle resistenze. Sia DF (fig. 2.) la velocità attuale alla superficie DK di un fiume DL da trovarsi colla sperienza, e DE sia l' altezza competente alla velocità DF , ed EFH una parabola conica col vertice in E , ed ACI sia un' altra parabola dello stesso parametro, che la prima, e col vertice in un punto A , che sia a livello della vera origine del fiume nel senso del *Guglielmini* (3). Secondo il *Grandi* le velocità dalla superficie D fino al fondo G del fiume senza le resistenze sarebbero le semiordinate DC ,

BM , GI , come disse il *Guglielmini*; ma attese le resistenze incontrate dall'acque nel loro cammino dall'origine vera fino alla sezione DG , faranno DF , BN , GH , come se l'acqua fosse partita da una origine della sola altezza DE , che dall'Autore si chiama altezza dell'*origine equivalente*.

8. Ma si osservi, che le resistenze maggiori, ed in conseguenza i maggiori scemamenti di velocità devono trovarsi presso il fondo, laddove giusta il *Grandi* lo scemamento maggiore di velocità caderebbe alla superficie, giacchè $CF > MN > IH$, come facilmente si comprende. E qui giova il notare, che lo stesso *P. Grandi* non fu già intieramente pago di questo suo sistema *essendomi passate* (egli dice nella Prefazione) *per la mente altre idee di nuove ipotesi, le quali mi si rappresentavano in aria di maggiore verosimiglianza*.

9. Dopo tutto ciò s'ami lecito, ch'io esponga brevemente ciò, che ho pensato più volte intorno al moto delle acque pei fiumi. CD sia il fondo inclinato di un tratto regolare di un canale (*fig. 3.*), ed AB sia la superficie dell'acqua, la quale sia più inclinata, che il fondo, cioè con esso convergente. S'intenda divisa l'altezza AC in tante parti eguali, per esempio AP , PT , TC , ed in altrettante parti eguali BR , RV , VD s'intenda divisa l'altezza BD . Supporrò, che le particelle A , P , T camminino per le linee AB , PR , TV , giacchè non vedo ragione, onde in un canale regolare debba accadere diversamente. Si consideri la particella E di un filamento PR dell'acqua. Se la verticale ES esprimerà il peso assoluto di essa, fatto il rettangolo ZG , farà EG la forza, colla quale quella particella viene spinta dalla gravità nella direzione del suo movimento verso R . Lo stesso si dica di ogni altra eguale particella P , o G del filamento PR , ognuna delle quali vien sollecitata continuamente dalla gravità verso R con una forza eguale alla EG , ch'è in ragione del seno dell'angolo $ESG = SEZ = PEt$ d'inclinazione del filamento PR all'orizzonte.

10. Così ogni altra particella I di un filamento inferiore TV viene spinta lungo la linea TV da una forza IK derivata dal proprio peso assoluto IQ . Per essere però la linea TV meno inclinata all'orizzonte, che la PR , l'angolo $IQK < ESG$; onde se le due particelle faranno eguali, ed $IQ = ES$,

farà $IK < EG$. Dunque per questa sola ragione nel qui supposto caso della superficie convergente col fondo la velocità dalla superficie andando verso il fondo dovrebb' essere sempre minore. Che se la superficie fosse parallela al fondo, anche tutti i filamenti PR , TV farebbero paralleli fra di loro, e le forze EG , IK farebbero eguali, e per questa sola ragione la velocità dalla superficie fino al fondo in questo secondo caso sarebbe eguale. E se la superficie AB divergesse dal fondo, anche i filamenti PR , TV farebbero divergenti, e la EG sarebbe minore della IK , e per questa sola ragione in questo terzo caso le velocità dalla superficie fino al fondo farebbero crescenti.

11. Codeste forze EG , IK , che così agitano le particelle E , I , derivate dal loro proprio peso, si possono dire forze intrinseche alle medesime particelle. Ma queste stesse particelle vengono inoltre agitate da altre forze ad esse estrinseche, cioè dalle pressioni delle altre particelle di acqua ad esse contigue, che le attorniano, e che le premono per tutti i versi. E siccome per esempio la particella I così premuta si muove nella direzione IV , è forza il dire che in qualunque altra direzione vi sia l'equilibrio fra le pressioni contrarie, che tendono a muovere la stessa particella I . Altrimenti se mancasse un tale equilibrio, per esempio nella direzione IQ , la particella I si muoverebbe in una direzione di mezzo fra la IQ , e la IV , e non nella supposta IV .

12. Basterà pertanto che si esaminino le pressioni di quelle particelle contigue, che possono aver parte nel maggiore, o minor movimento della particella I nella sola direzione IV . Si consideri perciò l'acqua $ATVB$ come divisa in tante colonne verticali insistenti a ognuna delle particelle minime acquee componenti il filamento TV , delle quali alcune sieno L , I , F , le cui colonne insistenti sieno LH , IO , FN . Qualunque sieno le velocità dell'acqua da O fino in I , farà sempre vero che le dette colonne premeranno continuamente al basso con tutto il loro peso, onde la particella I in virtù della gravitazione dell'acqua OI farà un conato a tutte le bande (come comunemente vien dimostrato), ed in conseguenza anche verso L , proporzionale all'altezza IO . Ma a questo conato verso L si oppone l'acqua HLI , la quale respinge la
stessa

stessa particella I verso F con un conato proporzionale all' altezza del punto H sopra il punto I , onde questo prevalerà al conato contrario della I verso L col peso della colonna acqua Hx determinata dalla orizzontale Ox , e farà questa un' altra forza della I ad essa estrinseca derivata dall' acqua, che le sovrasta, e l' attornia, la qual forza, o peso della colonna Hx la agita verso V unitamente alla forza IK derivata dalla gravità. Lo stesso vale per ogni altra particella del filamento TV , come per la F , che viene agitata verso V da una forza intrinseca derivata dalla gravità, ed inoltre da una forza estrinseca eguale al peso della colonna acqua Oy determinata dalla orizzontale Ny .

13. Si vede, che codeste forze estrinseche proporzionali alle Hx , Oy , ecc. sono in ragione del seno d' inclinazione della superficie AB all' orizzonte, qualunque siasi la profondità della particella I sotto la superficie, e qualunque siasi la direzione IV del moto della I verso V , e perciò anche quando una tal direzione invece di essere declive, come mostra la figura, fosse orizzontale, od anche acclive, come accade presso i fondi inferiori, ed acclivi dei gorgi, che s' incontrano nei fiumi, e presso il fondo di quei fiumi, che verso i loro sbocchi in mare hanno il fondo acclive, come il Po grande, od anche presso il fondo acclive dei fiumi al loro accostarsi al ciglio di una qualche cateratta.

14. Quindi è, che per la sola forza estrinseca ora ritrovata di ogni particella I le velocità di queste dovrebbero essere esattamente eguali tanto alla superficie, che sotto la superficie, e fino al fondo.

15. Queste due forze, una intrinseca, che deriva dal proprio peso di ogni particella, e l' altra estrinseca, che deriva dalla pressione dell' acqua insistente all' acqua, e nessun' altra, sono le forze, che tendono ad accelerare l' acqua lungo il fiume continuamente, cosicchè se la loro azione non venisse disturbata noi vedremmo i fiumi sempre più veloci quanto più ci accostiamo allo sbocco. Ma questo realmente non accade, giacchè allontanandoci dalla origine, ed arrivati per esempio alla pianura, dove il fondo è tuttora declive, benchè meno, osserviamo la velocità scemata di molto, e talvolta la vediamo scemata anche vie più prima di arrivare allo sbocco.

16. Quest' effetto deriva dalle resistenze, che fanno all' acqua prima le tortuosità del fiume, e poi le scabrezze del fondo, e delle sponde, le quali scabrezze non si può negare che ritardino l' acqua sensibilmente anche in distanza dal fondo, e dalle sponde, benchè il ritardo sia sempre minore a misura che ci scostiamo da quello venendo alla superficie, e da queste accostandoci al filone. E siccome le resistenze, che derivano dalle scabrezze, giusta le sperienze fatte, crescono in ragione duplicata delle velocità, facilmente accade che continuando le medesime scabrezze, e crescendo la velocità per la continua azione delle accennate forze motrici, crescono altresì le resistenze, ed in maniera che presto arrivano a paraggiare le forze motrici, con che l' acqua presto giugne ad una velocità *terminale* conveniente alle condizioni particolari di un dato tratto di fiume. Che se andando più oltre nello stesso fiume le scabrezze crescano, la velocità diminuirà, e con essa caleranno anche le resistenze, finchè queste si equilibrino di nuovo con le forze motrici, e si abbia così un' altra velocità terminale conveniente alle circostanze di quell' altro tratto di fiume. Se scemasse, o crescesse la pendenza del fondo, e della superficie, le forze motrici diverranno diverse, e varia a proporzione riuscirà la velocità terminale.

17. L' unico caso da me contemplato, in cui la velocità sotto la superficie potrebbe esser maggiore, che alla superficie, è quando la superficie sia divergente dal fondo (10). Ma questo nei tratti regolari di un fiume non s' incontra, mentre anzi generalmente la superficie piuttosto converge col fondo, benchè di tanto poco, particolarmente a qualche distanza notabile dallo sbocco, che in certo modo si può considerarla come parallela al fondo. Ed in questo caso le forze rispettive *EG*, *IK* riescono eguali, e per le cose dette ai n. 10, 14, se non vi fossero le resistenze, la velocità dalla superficie al fondo sarebbe esattamente la medesima. E perchè nel filone la maggiore resistenza deriva dal fondo, giacchè l' acqua colà è più vicina al fondo, che alle sponde, la velocità nel filone sarà minore presso il fondo, e poi crescerà venendo verso la superficie prima più, e poi meno fino alla superficie, cosicchè la velocità massima farà alla superficie, e la scala delle velocità sarà una qualche curva, come la *ABC*

(fig. 4.) dell' asse *DE*, essendo *DA* alla superficie, ed *EC* al fondo.

18. Colla teoria finqui esposta si comprende come un fiume, il quale abbia la superficie più inclinata che un altro, in parità di circostanze dovrà essere più veloce dell' altro, perchè abbiamo veduto, che una delle forze motrici è in ragione del seno d' inclinazione della superficie (13). Nel mio sperimento XVIII contro *Genneté* a un canale artefatto del fondo *AH* (fig. 5.) con acqua corrente da *A* verso *H* applicai una chiusa *MF*, e l' acqua dispose la superficie come la *IFN*, e la velocità in *B* era maggiore che in *C*, ed in *D*. In *E* poi il moto era notabilmente accresciuto, e più di tutto in *F*. In *G* il moto bene spesso era vorticoso. Dimandai l' anno 1767 qual fosse la forza, che muove l' acqua in *D*, e che fa crescere la velocità in *E*. Ora dirò, che la forza movente l' acqua in *D*, ed in *E* è l' accennata al n. 12, e trovata al n. 13 in ragione del seno d' inclinazione della superficie dell' acqua sopra *D*, e sopra *E*, e che la velocità in *E* è maggiore appunto perchè ivi l' inclinazione della superficie si fa maggiore.

19. Crescendo in un fiume l' altezza dell' acqua, ancorchè non crescesse l' inclinazione della superficie, crescerebbe la velocità, perchè l' acqua componente quell' altezza di più come più lontana dal fondo sentirà meno le resistenze di questo, e potrà ubbidire più alle sue forze motrici, che l' altra, che componeva la sola altezza di prima, e si muoverà più, e metterà anche più in moto l' acqua sottoposta. Maggiormente poi crescerà la velocità se, crescendo l' altezza, cresca ancora l' inclinazione della superficie.

20. Crescendo la larghezza senza che scemi l' altezza e l' inclinazione di superficie, le parti di mezzo del fiume faranno più lontane dalle sponde, le cui scabrezze faranno perciò un minor ritardo al filone, onde questo si muoverà più, e metterà più in moto il rimanente.

21. Egli è questo il saggio di teoria del movimento delle acque pei fiumi, ch' io mi era prefisso di esporre. Ora verrò esaminando quanto questa teoria si concilj colla speriienza. Il metodo più insinuato dagli Autori, ed il più applaudito per iscoprire colla speriienza il moto dell' acqua anche

sotto la superficie , è stato quello di un pendolo , o sia di una palla *B* (*fig. 6.*) attaccata con un filo a un punto fisso *A* da immergerli sotto la superficie *DE* dell'acqua di un fiume corrente da *D* verso *E* , la quale perciò terrà la palla col filo lungi dalla verticale *AD* più , e meno secondo la diversa velocità dell' acqua , ed il diverso peso specifico della palla , pretendendosi di poter ricavare così la velocità dell' acqua nel sito della palla colla sola osservazione dell' angolo di deviazione della parte del filo fuori dell' acqua .

22. Di questa fatta di sperimenti proposti dal *Guglielmini*, dal *P. Grandi* , dall' *Ermanno* , ed ultimamente dal chiarissimo *P. Ab. Cametti* nella sua *Mechanica fluidorum* l' anno 1777 ne vedo fatti non pochi dal *Zendrini* , dai Matematici di una Visita al Po grande l' anno 1729 , dal *P. Lecchi* , e dal *Sig. Michelotti* ; i quali generalmente hanno trovato , che alle immersioni più profonde della palla ha corrisposto un maggior angolo di deviazione del filo dalla verticale , e generalmente hanno convenuto , che le velocità dell' acqua nel sito della palla fossero in ragion duplicata delle tangenti dei detti angoli , d' onde ne verrebbe , che a maggiori profondità sotto la superficie corrispondano velocità sempre maggiori , affatto contro la mia teoria (17) .

23. Due inavvertenze a mio giudizio si sono commesse in questo genere di sperimenti dai loro Autori . L' una è , che quando la palla è immersa a qualche profondità , l' angolo di deviazione del pendolo non deriva solamente dall' azione dell' acqua contro la palla , come essi hanno creduto , ma deriva ancora dall' azione dell' acqua contro quella porzione di filo , che si trova immersa , ed esposta all' acqua . Per la qual cosa quand' anche la velocità dell' acqua sotto la superficie , e fino al sito della palla , si mantenesse la medesima che in superficie , l' angolo di deviazione del filo , che si osserva fuori dell' acqua , dovrebbe necessariamente esser maggiore , che quando la palla fosse appena sotto la superficie ; e profundando la palla di più , il detto angolo crescerebbe di più , perchè l' acqua agirebbe contro una porzione maggiore di filo .

24. L' altra circostanza non avvertita è , che il filo essendo pieghevole dee disporli sott' acqua in una curva *EOF* , che vien detta *filare* , e per determinare la quale converrebbe

che fosse nota la scala delle velocità dell'acqua, ch'è appunto quella che si cerca.

25. Da quest' ultima considerazione si fanno palesi altri due inganni de' soprannominati Autori: L' uno è, che hanno giudicato la palla nel punto G della retta AE prolungata, ed in conseguenza alla profondità IG , che è minore della vera profondità HF . L' altro poi più interessante è, che hanno dedotto la velocità dell' acqua nel sito da essi supposto della palla dalla grandezza dell' angolo DAE di deviazione del filo non sommerso, quando veramente non potrebbe desumerfi che dall' angolo cam , che fa colla verticale am il diametro ac della palla, che parte dal punto a di sospensione della palla dal filo; il qual angolo ognun vede ch' è sempre minore dell' angolo DAE (per essere $cam = iFn$, e $DAE = EnH > iFn$); e sarà eguale all' angolo DAB nel caso, che la velocità in F sia eguale alla velocità in B ; e sarà anzi minore dell' angolo DAB nel caso, che la velocità in F fosse minore che in B .

26. Per tutte queste ragioni i suddetti Autori hanno errato, e l' errore dev' essere stato maggiore secondo che la palla è stata di un peso specifico minore, e secondo che il filo è stato più grosso, e più sott' acqua. La grossezza del filo ci vien taciuta da tutti; ma egli è certo, che quei fili hanno retto al peso della palla, ed all' impressione dell' acqua contro la palla, dal che si può concludere, che la loro grossezza non sia stata indifferente, e trascurabile, come me lo ha poi mostrato lo sperimento, che vengo a descrivere.

27. In un canale largo piedi 15 circa (parlerò a misura di Parigi), e profondo sei piedi, con un galleggiante trovai l' anno 1769, che la velocità dell' acqua in superficie era di piedi 2. 4 per ogni minuto secondo. Nel fondo GT (fig. 7) del medesimo canale presso un ponte di legno, che non angustia punto il corso dell' acqua, conficcai verticalmente una tavola PB di tale lunghezza, che superava la superficie CD dell' acqua, avendo fatto che la faccia AB fosse parallela alle sponde, o sia a seconda del corso dell' acqua diretto da C verso D . Ben fermata la tavola con una mano in O , io immergeva a poco a poco l' asta OE facendo strisciare un risalto F dell' asta lungo la costa Pn della tavola, intor-

no al quale risalto F l' asta potea aggirarsi accostandosi alla tavola ora con l' estremità E , allorchè l' acqua investiva con maggior forza la parte FE che l' altra FC , ed ora con l' estremo O , se l' acqua spingeva con più di forza la parte FC che l' altra FE .

28. Lo scopo mio era di trovare quella immersione, in cui la forza dell' acqua contro FE si equilibrava con l' altra contro FC . Arrivato al punto di tale equilibrio io me ne accorgeva facilmente, perchè allora colla mano io sentiva, che l' estremo O nè mi veniva spinto dall' acqua verso la tavola, nè mi veniva allontanato dalla medesima.

29. In uno di questi sperimenti la parte FE era di un piede, e tentando trovai il detto equilibrio quando FC fu di 11 pollici; il che mostra, che quell' acqua fino alla profondità di quasi due piedi sotto la superficie correva con una velocità minore, che in superficie, però di poco. Nel secondo sperimento io avea mutato luogo al risalto F dell' asta in maniera, che FE era di due piedi, e tentando di nuovo trovai il descritto equilibrio quando FC fu di un piede e mezzo: il che mostra, che alla profondità di tre piedi e mezzo, o sia di piedi 2. 6 sopra il fondo, la velocità era sensibilmente minore che in superficie.

30. Nel medesimo sito feci uso di un pendolo. La palla era del diametro di due pollici, ed immersa nell' acqua perdeva la metà del suo peso. Il diametro del filo era due terzi di linea, e lo stesso filo era attaccato a un punto fisso A (fig. 8) sopra l' acqua BD piedi 2. 11. Nella prima immersione il filo AC era di piedi 3. 6, e l' angolo BAC fu tale, che l' orizzontale BF riuscì di pollici 18 prossimamente, cioè che la palla rimaneva sotto la superficie dell' acqua corrente alquanto meno di due pollici e mezzo.

31. Avendo dato al filo una lunghezza maggiore AE di piedi 6. 11, ebbi l' angolo BAD , essendo BD di pollici 32, e DE di piedi 2. 8. 4.

32. Le linee rette eguali CG , EL verticali esprimano il peso della palla nell' acqua, il qual peso in C equivalerà a due forze CK , CH , ed in E a due altre forze EN , EM . Ma le due forze CH , EM devono equilibrarsi colle forze contrarie dell' acqua, le quali sono come i quadrati delle ve-

locità in *C*, ed in *E*. Dunque secondo i soprannominati Autori i quadrati delle velocità in *C*, ed in *E* avrebbero dovuto essere :: *CH*: *EM*::*GK*: *LN*::*BF*: *BD*, ed in conseguenza la velocità in *C* alla velocità in *E*:: \sqrt{BF} : \sqrt{BD} :: $\sqrt{18}$: $\sqrt{32}$ (vegg. n. 30. 35.):: $\sqrt{(9.2)}$: $\sqrt{(16.2)}$::3:4, cioè secondo essi la velocità in *E* dovrebb' essere stata sensibilmente maggiore, che in *C*; dovechè secondo le sperienze precedenti la velocità in *E* era sicuramente minore, che in *C* (29, 30).

33. Dopo tutto ciò parmi di poter concludere, che l'uso di rai pendoli non è punto al caso per iscoprire le vere velocità dell' acqua a qualche profondità notabile sotto la superficie, e che dalle sperienze fatte con essi non si può tirare veruna conseguenza nè favorevole, nè contraria a una qualche teoria.

34. Lo stesso affatto convien dire di altri sperimenti fatti in Po con una certa *Fiasca* riferiti dal P. *Grandi* alla fine del suo primo libro, e da Eustachio *Manfredi* nelle Annotazioni al trattato della natura de' fiumi del *Guglielmini*. La detta *Fiasca*, che dal P. *Grandi* si dice *Idrometrica*, era stata proposta dal *Nadi* del 1721 in occasione di una Visita al Po. Era questa un vaso *A* (fig. 9) di latta più lungo che largo, con un sottil foro in *E* aperto verso la sommità della parte più stretta, e con un tubo annesso *BG*, per cui passava un filo attaccato a una susta, cosicchè tirando il filo in *G* il foro *E* restava aperto, e rallenrando il filo quel foro restava chiuso. Immersa la *Fiasca* a varie profondità sotto la superficie *MN*, e tenuto il foro *E* aperto per un dato tempo, e rivolto contro la corrente, l'acqua entrava per *E* mentre l'aria contenuta nella *Fiasca* poteva uscire pel tubo *BG*. Le quantità di acqua, che in tempi eguali entrarono per *E* nella *Fiasca* tenuta a diverse profondità, furono sempre in ragione sudduplicata delle altezze dell' acqua del fiume sopra il foro *E*; dal che si volea arguire, che tale fosse la ragione delle velocità dell' acqua del Po a quelle diverse profondità. Ma siccome lo stesso avvenne quando le sperienze furono ripetute in un' acqua stagnante, si dovette concludere che il metodo era inutile.

35. Altre sperienze sono state fatte col *Tubo ricurvo del Pitot*. Adoperò quest' Autore un tubo di vetro *AEF* ricur-

vo in E (fig. 10) assicurato nell' acqua corrente con certa macchinetta da esso descritta nelle Memorie dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi all' anno 1732. Immerse il tubo a diverse profondità CE sotto la superficie CD della Senna, e tenendo la bocca F diretta contro il corso dell' acqua, notò le altezze CB , cui saliva l' acqua dentro il tubo sopra il livello dell' acqua esteriore CD . La velocità, che può acquistare un grave cadendo liberamente dall' altezza BC trovata in ciascuna immersione, era secondo l' Autore la velocità dell' acqua in F . Il Zendrini (*Leggi ecc. delle acque correnti* pag. 134) sospetta, che l' altezza BC non sia proporzionale alla forza dell' acqua in F , e che parte di questa forza s' impieghi in penetrare attraverso il cilindretto acqueo EC stagnante nel tubo; ed il Sig. Francesco Domenico Michelotti (*Sperimenti Idraulici* vol. I. pag. 148) credette, che la forza della corrente in F dovesse misurarsi non dalla sola altezza CB , ma da tutta l' altezza EB , cosicchè le velocità in F farebbero come le radici quadrate delle altezze EB per essere le forze come i quadrati delle velocità. Io per accertarmi del vero col fatto mi son servito di un tubo AEF di latta, dentro il quale avea inserito una bacchetta sottile, e leggera GB , lunga come AE , che galleggiava sopra l' acqua mediante un pezzo di sughero applicato all' estremo B di modo, che la porzione AG esterna della bacchetta mi dinotava l' altezza del cilindro acqueo EB dentro il tubo; ed in varie immersioni più, e meno profonde la porzione CB fu prossimamente la medesima tuttochè variassero le altezze BE . E siccome questo mi accadde in quel medesimo luogo, dove io mi era accertato colle sperienze del n. 29, che l' acqua correva pressochè colla medesima velocità in superficie, e sotto la superficie fino alla profondità del mio tubo, mi sono con ciò assicurato che non abbia luogo la difficoltà del Zendrini, e del Sig. Michelotti.

36. Di più il Sig. Michelotti dopo un qualche carteggio con me replicò le sue sperienze, e nel suo secondo Volume stampato in Torino l' anno 1771 dice di aver immerso un tubo ricurvo di latta simile al mio colla bocca inferiore rivolta secondo la direzione del corso dell' acqua, e di aver osservato, che allora nel tubo l' acqua si componeva al livello della

della esteriore, e che rivolta la stessa bocca contro la corrente l'acqua interna si elevò nel tubo sopra l'esterna; e spiega il fenomeno con dire, che nel primo caso la sola pressione dell'acqua esteriore facea salire l'acqua nel tubo, e che nel secondo caso alla semplice pressione si aggiunse una forza prodotta dal movimento dell'acqua corrente; e perciò conviene, che in tai casi la celerità dell'acqua si possa argomentare dal maggior alzamento dell'acqua dentro il tubo sopra l'acqua al di fuori del tubo alla maniera del *Pitot*.

37. Ma in diverse immersioni fatte dal *Pitot* del suo tubo sotto il ponte reale della Senna, delle quali la massima fu a tre piedi sotto la superficie, l'acqua dentro il tubo si alzò sempre egualmente sopra l'acqua esterna. Dunque colà per le cose dette fino a tre piedi sotto la superficie la velocità fu sensibilmente la medesima.

38. Il chiarissimo Sig. Ab. *Ximenes* negli anni 1778, 1779 adoperò la seguente macchina. *AB* (*fig. 11*) è un albero verticale, che potea muoversi liberamente intorno ai perni *A*, e *B*. Alla rotella *C* era avvolto un filo, che passava sopra una puleggia *D*, e che portava un peso *E*. A qualunque profondità *MN* sotto la superficie *GH* dell'acqua potea fermare all'albero *AB* una ventola *F* con due braccioli *a*, *c*; ed il peso *E* dovea essere tale, che tenesse la ventola pressochè ferma normalmente contro il corso dell'acqua. Dalle misure della ventola, dei suoi braccioli, della rotella, e del peso *E* di ciascuna speriencia deduce l'altezza di quel prismma di acqua, che premeva la ventola, la quale altezza è quella, che conviene a un corpo cadente per acquistare la velocità dell'acqua nel sito della ventola. Da una serie di sperienze dedusse, che dalla superficie fino a un certo punto verso il fondo l'acqua si manteneva egualmente veloce; e che da quel punto fino al fondo la velocità diveniva sensibilmente sempre minore.

39. Finalmente dirò di uno sperimento, che per quanto io sappia è stato il primo ad essere tentato per investigare in qualche maniera nei fiumi il rapporto della velocità dell'acqua sotto la superficie a quella della superficie: ed è quello del P. *Cabeo* Ferrarese con un' asta *AB* (*fig. 12*) di legno con un corpo in *B* di un peso specificamente maggiore di

quello dell' acqua, e con alcune vessehe in *C*, buttata nell' acqua di un fiume colla superficie *MN*, e corrente da *M* verso *N*. Ecco che ne dice l' Autore nel suo libro primo delle Meteore stampato in Roma l' anno 1686 al testo 60: *Si enim poneret bastam in aqua stagnanti, pars eminent AC esset perpendicularis ad superficiem aquae; similiter si moveatur tota equali velocitate, servaret semper eandem positionem. At videbis partem eminentem bastae supra superficiem aquae inclinari ad partem anteriorem, quod est evidens argumentum superiorem partem aquae velocius fluere.*

40. Fin qui ho parlato degli sperimenti fatti da altri, non avendone inferito dei miei, che per incidenza, e parmi di aver mostrato, come di essi alcuni non sono punto atti a dinotar bene le velocità sotto la superficie, come sono tutti gli sperimenti fatti con Pendoli, e gli sperimenti fatti colla Fiasca Idrometrica del *Nadi*; e che tutti gli altri mostrano chiaramente, che nei siti degli sperimenti le velocità sotto la superficie o sono state eguali alla velocità della superficie, o ne sono state minori, come richiede generalmente la mia teoria. Ora in conferma di questo soggiungerò alcuni altri sperimenti miei.

41. Di due sperimenti fatti da me in Roma l' anno 1763 non farò parola, perchè fatti in piccolo, e perchè si possono vedere in due Raccolte una stampata in Parma, e l' altra in Firenze, e sono i due primi dell' *Aggiunta di Sperimenti* contro *Genneté*; onde passerò ad altri, de' quali il primo sia il da me replicato più volte trovandomi in qualche barca. Ho fatto, che questa si muova a seconda del corso dell' acqua, e colla velocità dei galleggianti vicini. Esprima *AC* (fig. 13) la superficie di quell' acqua corrente da *A* verso *C*. *DE* era un' asta di legno lunga sei, otto, dieci piedi (talvolta era un remo), ch' io immergeva nell' acqua verticalmente, cosicchè restava fuori dell' acqua con una porzione *BD*, e per tenerla in tal positura io non impiegava altra forza che quella di premere colla mano in *D* in giù quanto bastava per impedire, che l' asta, perchè di un minor peso specifico dell' acqua, non venisse spinta all' insù dall' acqua medesima. E quando il corso della barca diveniva per esempio alquanto maggiore di quello dei galleggianti, l' asta si

piegava con forza girando l'estremo *E* verso *A*; succedendo il contrario qualora la barca diveniva, anche per poco, più lenta dei galleggianti vicini. Dal che si vede manifestamente, che quando la barca andava del pari coi galleggianti, e che l'estremo *E* non mi veniva portato nè verso *A*, nè verso *C*, si vede, dissi, che l'acqua sotto la superficie non correva sensibilmente più, che in superficie, perchè se avesse corso più sotto la superficie, mi avrebbe portato l'estremo *E* verso *C*.

42. Altre volte essendo pure in barca ho immerso nell'acqua dei mattoni appesi ognuno ad uno spago, che venivano tenuti da me, e da altri colla mano sporta fuori della barca. Gli spaghi erano di diverse lunghezze, e quando mi trovava colla barca in siti regolari del fiume, e che la barca andava del pari coi galleggianti vicini, le porzioni di spago fuori dell'acqua erano sensibilmente verticali, a riserva dei più lunghi (i cui mattoni attaccati si accostavano al fondo del fiume), de' quali le porzioni fuori dell'acqua si vedevano sensibilmente inclinate all'avanti, dinotando così, che presso il fondo la velocità diveniva minore.

43. Nel sito descritto al n. 27, e dove mi era assicurato, che l'acqua alla profondità di due piedi e mezzo circa correva con una velocità minore, ma di poco, che in superficie, buttai una canna *DE* avente in *E* un mattone di tal peso, che dopo pochi bilanciamenti restò immersa con una porzione *BE* lunga non più di tre piedi, essendo trasportata dall'acqua con una positura sensibilmente verticale, a riserva di alcuni pochi tratti, nei quali camminò inclinata all'avanti ma di poco. Altre volte, e non poche, ho ripetuto questo sperimento nel Po grande servendomi colà non di caune, ma di aste di legno ora con mattoni, ed ora con piombo in *E* di tal peso, che l'asta rimaneva sopra l'acqua con una lunghezza di un piede, o due, essendo il Po ora con acqua mediocre, ed ora in piena, ed essendo la porzione *BE* talvolta di 10, talvolta di 15, ed una volta di 20 piedi; ed in questi casi vidi tali aste qualche volta sensibilmente verticali, ma per lo più inclinate all'avanti, benchè di poco, a riserva delle volte, ch'io mi sono incontrato dove l'acqua avea dei moti irregolari, nei quali qualche volta l'asta è stata

inclinata all' indietro , ed una volta avendo due aste una più lunga dell' altra , una di queste era inclinata a una parte , e l' altra a un' altra nel medesimo tempo , indizio di un movimento vorticoso .

44. Ecco pertanto un' altra mano di sperimenti , dai quali ho appreso , che nei siti regolari dei fiumi le velocità dalla superficie al fondo o sono sensibilmente le medesime fino a un certo punto poco distante dal fondo , come dice di aver osservato il Sig. Ab. *Ximenes* , o (il che mi sembra più naturale) decregono , ma da principio assai poco , facendosi poi gradatamente vie maggiore il decrescimento a misura che si va più verso il fondo , e con quella legge , che non è per anche nota . Per la qual cosa parmi di dire a ragione , che la teoria da me esposta concorda assai bene colla speranza ; desiderando io per altro , che altri ancora si occupino in esperimenti di questa natura ; perchè instituite con metodo più serie di continui sperienze in fiumi diversi , ed in istati diversi , potrebb' essere , che si arrivasse un dì ad avere una legge delle velocità delle acque correnti pei fiumi sufficientemente prossima al vero , colla quale date le misure , e le condizioni di un fiume si possa senz' altro dire qual sia la sua portata , punto molto interessante pel regolamento dei fiumi . Ma finchè ci mancano codeste serie di sperimenti come trovare la portata di un fiume ? Sarà questo il soggetto dell' Articolo , che segue .

*Nuovo metodo per trovare colla speranza la quantità
dell' acqua corrente per un fiume .*

45. Per misurare l' acqua corrente per un piccolo canale largo per esempio tre palmi , ed alto uno , se il canale era irregolare , il P. *Castelli* (prop. 1. l. 2.) applicava ad esso un Regolatore , o sia un letto orizzontale di legno , e due sponde verticali di legno ; ed inferiormente al Regolatore intestava il canale , e ad una sua ripa presso il Regolatore applicava tanti sifoni , che assorbissero tutta l' acqua sopravveniente di modo , che il canale per l' applicazione di essi non crescesse , nè calasse . E trovata colla speranza quant' acqua scaricava in un dato tempo ciascun sifone sapeva dire la portata del

canale ; o sia quant' acqua passava per una sezione regolare di esso (qual era quella del Regolatore) anche non essendovi l' intessatura . Trattandosi in secondo luogo di un canale più grosso , per esempio largo 20 palmi , ed alto 5 , per averne la portata applicava a questo pure un Regolatore o di legno , o di muro , e superiormente a questo derivava dal canale un canaletto largo tre , o quattro palmi applicandovi un Regolatore . Coi fisoni misurava la portata di questo , e dal rapporto delle altezze , e larghezze dell' acqua corrente pei due Regolatori argomentava (colla sua regola delle portate in ragione delle larghezze , e dei quadrati delle altezze) qual fosse la portata del canale maggiore . Accadendo in terzo luogo di dover trovare la portata di un fiume grosso , proponeva , che si applicasse a questo un Regolatore , e che dal fiume si divertisse un canale misurabile , come il precedente , e che colla regola accennata si trovasse anche la portata del fiume grosso . Non gli faceva caso la spesa grave che potrebbe occorrere per fare tai rilievi dicendo , che i concetti grandi , come quello di misurare l' acqua di un fiume grosso , non devono cascare in mente , che a persone grandi , a Principi potenti , e che possono fare una qualche spesa per isfuggire altre spese maggiori , che si farebbero per mancanza della cognizione della quantità ricercata dell' acqua , e per isfuggire anche dei disgusti fra i medesimi Principi .

46. Ma quantunque alla regola delle velocità come le altezze , o sia delle portate come le larghezze , ed i quadrati delle altezze , si conformino più sperienze in piccolo ; pure perchè tal regola è tuttora senza dimostrazione , nè è ancora ben verificata da sperienze in grande , non vedo , che questo metodo del *Castelli* per trovare la misura dell' acqua corrente per un fiume sia da abbracciarsi .

47. Il *Guglielmini* pure si vale di uno , o più Regolatori , ma in una maniera diversa . Propone , che al Regolatore si applichi una Cateratta , la quale si cali fino a un piede , o due , sotto la superficie dell' acqua corrente pel Regolatore , con che l' acqua sarà obbligata a gonfiarsi superiormente alla cateratta . E supponendo le velocità dell' acqua corrente per quella sezione così diminuita come le ordinate di una parabola conica col vertice alla superficie dell' acqua sostenuta , tro-

va la quantità dell' acqua del fiume. Se il fiume è così grande, che non vi si possa adattare un Regolatore, suggerisce, che col metodo prescritto si misuri l' acqua dei fiumi minori, che lo compongono, come meglio si può vedere alla fine del lib. 4. della *Misura delle acque correnti* dove alla difficoltà della molta spesa risponde col sentimento sopra riferito del P. *Castelli*.

48. Ma ho mostrato, che la velocità delle acque correnti non sono già come qui vuole l' Autore (4, 5, 6,). Dunque nè anche questo metodo del *Guglielmini* è al caso nostro.

49. Altri hanno scielto più perpendicolari di una sezione del fiume, e adottando per sicuro l' uso del pendolo hanno con questo indagato la velocità dell' acqua a diverse profondità di ciascuna perpendicolare, indi trovata una velocità media fra tutte le pretese trovate velocità hanno moltiplicato questa nella sezione stessa. Ma ho mostrato quanto sia fallace l' uso del pendolo (21, 22, 23, 24, 25), perciò fallaci saranno stati ancora i risultati di tai rilievi.

50. Potrebbe cader in pensiero a taluno di adoperare il tubo ricurvo del *Pitot* in luogo del pendolo. Ma conviene sapere in primo luogo, che l' acqua interna al tubo è soggetta ad oscillazioni sensibili, particolarmente dove il corso dell' acqua è più veloce, onde conviene scegliere un' altezza di mezzo con una estimazione oculare, che non può tenersi per molto precisa. Oltre di che nei fiumi grandi, ed in tempo di piena, come poter fermare il tubo nel filone, ed a profondità considerabili? Anche la ventola del Sig. Ab. *Ximenes* è soggetta alle sue oscillazioni, ed è difficile il praticarla in tempo di acque alte. L' Autore non ne ha fatto uso finora in un' altezza di acqua, che sia maggiore di piedi 9. 9 di Parigi. Promette di tentare con essa delle sperienze nell' Arno in tempo di mezze piene. Ma in tempo di piena dispera affatto, mentre che il maggior bisogno di tali sperienze è nel colmo delle piene.

51. Il metodo, ch' io sono per proporre, è appunto tale, che si può praticare anche in tempo delle piene, e con una spesa discreta, e di gran lunga minore di quella, che contemplanano il *Castelli* ed il *Guglielmini* (45, 47). Non è altro che una modificazione del metodo del P. *Cabeo*, voglio di-

re, che dove il P. *Cabeo* adoperava delle aste AB (*fig. 12*) di legno con un peso in B , e con delle vessiche in C , io propongo delle aste consimili, ma senza vessiche, e con una parte infima EB (*fig. 14*) o di metallo, o armata di metallo in modo, che tutta l'asta AB sia un cilindro, ed il metallo dev' essere tanto, che l'asta così preparata posta in un'acqua stagnante abbia a mettersi da sè in una positura verticale, e galleggiare con una porzione AC di un piede, o due fuori dell'acqua. Della preparazione di queste aste (ch'io chiamo *ritrometriche*) parlerò verso il fine.

52. Intanto volendo la portata attuale di un fiume, si scielga di esso un tratto CP' (*fig. 15*) di duecento, o più tese, che sia dei più retti, e dei più regolari. Si butti una delle descritte aste in un punto H' quindici, o venti tese superiormente al punto C . Questa dopo alcuni bilanciamenti arriverà in C portata dall'acqua sensibilmente parallela a se stessa, e con moto regolare, ed equabile, e questa sia la AB , che supporrò inclinata all'avanti. Mostrerò come con quest'asta si possa scoprire assai prossimamente le velocità dell'acqua dalla superficie CP' fino al fondo rl lungo il cammino, che farà l'asta da C in P' .

53. Convien esaminare tutte le forze, che tendono ad agitare l'asta AB essendo $HMLK$ la curva dell'asse IH (*12*), alla quale terminano le velocità dell'acqua, che porta l'asta. Una di queste forze è il peso assoluto dell'asta stessa, il quale si può intendere come raccolto nel centro di gravità dell'asta; e codesto centro sia nel punto D ; e la verticale DE esprima il peso suddetto, che (fatto il rettangolo *im*) equivale a due forze Di , Dm . Un'altra forza è quella, colla quale l'acqua spinge all'insù ogni porzione della parte immersa CB dell'asta, la qual forza per essere la parte CB cilindrica, si può considerare come raccolta nel punto F di mezzo della stessa parte CB , e si può esprimere con una verticale FG , che (fatto il rettangolo *bk*) equivale alle due forze Fk , Fb . E codesta forza FG si trova eguale al peso di un volume di acqua eguale alla porzione sommersa CB dell'asta. Le altre forze, che tendono ad agitare l'asta sono le impressioni dell'acqua, che la urta dove in un modo, e dove in un altro. Imperocchè è manifesto, che l'asta non

potrà muoversi tutta colla velocità massima IK , nè colla sola velocità minima NM , e che si ridurrà ad una velocità di mezzo; e questa sia la OL comune all' acqua nei punti O, P : di modo che da P in su l' acqua è più veloce dell' asta, e da P in giù è l' asta, ch' è più veloce dell' acqua. Quindi nel punto Q la velocità dell' acqua è ut , e quella dell' asta è $us = OL$. Dunque in Q l' acqua investe l' asta colla velocità rispettiva St spingendola da Q verso S . Ma in T la velocità dell' acqua è XR , e quella dell' asta è $XZ = OL$. Dunque in T l' asta fende l' acqua colla velocità YZ ; e l' acqua reagisce in T contro l' asta con quella stessa forza, colla quale investirebbe l' asta, che fosse ferma, colla velocità ZY diretta da T verso a .

54. Esprimiamo codeste forze dell' acqua. La lunghezza CB della parte immersa dell' asta si dica $= b$, ed il suo diametro $= i$. Si metta con Archimede, che il quadrato del diametro all' aja del cerchio stia come 14 a 11; e si troverà $\frac{11 i^2}{14} =$ base del cilindro CB . Dunque $\frac{11 bi^2}{14}$ sarà il volume del cilindro CB . Il peso di un egual volume di acqua sia P . Onde $FG = P$ (53). Si cerchi l' impressione Qg , che fa all' asta normalmente uno strato sottilissimo Qs dell' acqua colla velocità rispettiva St . Poichè b è la lunghezza del cilindro CB , ed i il suo diametro, sarà bi la sua sezione per l' asse. Pertanto si concepisca, che codesto piano bi sia situato in cb' verticalmente, e che sia incontrato dall' acqua direttamente in tutta l' altezza cb' colla velocità $St = u$; intendo per u lo spazio, che può correre l' acqua uniformemente in un tempo $k = 1''$ colla detta velocità. La caduta libera di un grave nel detto tempo k sia b . Si sa, che la velocità alla fine di tale caduta è $2b$. Ma come i quadrati delle velocità di un corpo cadente, così sono le cadute, o sia le altezze dalle quali il corpo cadendo liberamente acquista quella velocità. Dunque facendo $4b^2 : u^2 :: b$ al quarto termine $\frac{u^2}{4b}$, questo sarà la caduta competente alla velocità u .

55. Anche secondo le sperienze dei Signori d' *Alembert*.
Condorcet.

Condorcet, e *Bossut* pubblicate l'anno 1777 l'impressione dell'acqua al detto piano bi è eguale al peso di un prisma di acqua, che abbia per base lo stesso piano, e per altezza la trovata altezza $\frac{u^2}{4b}$ (54), con qualche cosa di più. Non computando qui quel di più, ch'è poco, il volume dell'indicato prisma di acqua sarà $\frac{biu^2}{4b}$. Ma il peso del volume $\frac{11bi^*}{14}$ di acqua si è detto P (54), e come i volumi di acqua così sono i loro pesi: dunque il peso dell'acqua del volume $\frac{biu^2}{4b}$ sarà $\frac{7Pu^2}{22bi}$, ch'è l'impressione ricercata dell'acqua contro il piano bi situato in cb' .

56. Ora al suddetto piano s'intenda sostituito un cilindro CB del diametro i . Dalle sperienze 35, ed 89 de' sopranominati Signori, ed anche da altre del Sig. *Borda* fatte nell'aria (*Memorie dell'Accademia* di Parigi 1760) raccolgo, che la detta impressione contro il piano bi sta all'impressione contro il cilindro sostituito come 20 a 11. Dunque facendo

20 : 11 :: $\frac{7Pu^2}{22bi}$ (55) al quarto termine $\frac{7Pu^2}{40bi}$, questo farà il peso eguale all'impressione fatta dall'acqua al detto cilindro posto verticalmente in cb' . Sia $Hu = x$, ed $Ss = dx$.

Facendo $cb' : Ss :: \frac{7Pu^2}{40bi}$ al quarto termine $\frac{7Pu^2 \cdot Ss}{cb' \cdot 40bi}$
 $= \frac{7Pu^2 dx}{40bbi}$, questo farà l'impressione al cilindro verticale

fatta in Ss dallo strato di acqua Qs colla velocità $u = St$. E perchè l'angolo HCB d'incidenza dell'acqua sopra l'asta io l'ho trovato sempre maggiore di un semiretto, secondo le dette sperienze del 1777, l'impressione normale al cilindro collocato in cb' all'impressione normale al cilindro CB in Q fatta dallo stesso strato di acqua Qs starà come CB a Cq essendo Cq verticale incontrata dalla orizzontale BqN . La

prima trovata $= \frac{7Pu^2dx}{4cbbi}$ sia espressa con una linea orizzontale QR , e la seconda sia espressa con una Qg normale all'asta; e sia $HI=m$, $HN=n$, ed $HO=q$: onde $IN=m-n$ $= Cq$, e si avrà $CB (=b): Cq (=m-n): : QR (= \frac{7Pu^2dx}{4cbbi}) :$

$Qg = \frac{7P \cdot (m-n) \cdot u^2dx}{4cb^2bi}$, essendo $u^2dx = (St)^2 \cdot Ss$; onde

$\int Qg = \frac{7P \cdot (m-n)}{4cb^2bi} \int (St)^2 \cdot Ss$. Nell' integrazione la costante si determina mettendo l' integrale $= 0$ quando $x = HO = q$. Facendo di poi $x = HI = m$ si avrà la somma delle Qg da P fino in C .

57. Sarà $On = x - q$; e perchè $Cq: CB::On:PQ$, farà $m-n: b::x-q: PQ = \frac{b \cdot (x-q)}{m-n}$; onde $PQ \cdot Qg$

$= \frac{7P \cdot (x-q) \cdot u^2dx}{4cbbi}$, ch' è il momento di ogni Qg riferito al punto P . E la somma di questi momenti divisa per la somma delle Qg , cioè $\frac{\int PQ \cdot Qg}{\int Qg}$ darà la distanza del centro delle forze Qg dal punto P , com' è noto.

58. Nella integrazione si operi come si è detto al n. 56. E quando $x = HI = m$, cioè quando PQ diviene PC , la detta distanza del centro delle forze Qg da P sia Pn ; ed nx normale all' asta sia in tal caso $\int Qg$ (56), così si avrà

$Pn = \frac{\int PQ \cdot Qg}{nx}$, e tutte le Qg distribuite lungo la PC equiveranno alla sola nx applicata in n .

59. Lo stesso discorso si può applicare al caso di uno strato TZz di acqua preso al di sotto del punto P . In questo caso essendo $x = HX$, farà $dx = Zz$, ed $u = YZ$, velocità colla quale l' acqua reagisce in T con una forza, che equivale all' impressione dello strato TZz se essendo l' asta ferma l' acqua la incontrasse colla velocità YZ diretta da Z verso

T, e coll'angolo d'incidenza $ZTC = HCB$ (56). Codeſta impreſſione qui pure conſiderata normale all'aſta ſia Tb , e ſi troverà $Tb = \frac{7P \cdot (m-n) \cdot u^2 dx}{4ob^2 bi}$ (57) eſſendo

$u^2 dx = (\gamma Z)^2 \cdot Zz$; onde $\int Tb = \frac{7P \cdot (m-n)}{4obbi} \int (\gamma Z)^2 \cdot Zz$. Integrando la conſtante ſi trova mettendo l'integrale $= 0$ allorchè ſia $x = HN = n$; facendo di poi $x = HO = q$ ſi avrà la ſomma delle Tb da B fino in P .

60. Poichè qui $x = HX$ farà $OX = q - x$. Ma $Cq : CB :: OX : PT$, dunque $m - n : b :: q - x : PT = \frac{b \cdot (q - x)}{m - n}$; ed il momento delle Tb riferito al punto P farà $PT \cdot Tb = \frac{7P \cdot (q - x) \cdot u^2 dx}{4obbi}$. E la ſomma di queſti momenti diviſa per la ſomma delle Tb darà la diſtanza del centro delle impreſſioni Tb dal punto P .

61. Nell'integrazione la conſtante ſi determini come al n. 59. E quando $x = HO = q$, cioè quando BT diviene BP , la detta diſtanza ſia Po , ed oy normale all'aſta ſia in tal caſo $\int Tb$ (59), e così ſi avrà $Po = \frac{\int PT \cdot Tb}{oy}$, e tutte le Tb diſtribuite lungo la BP equivaleranno alla ſola oy applicata in o .

62. Ora perche' l'aſta arrivata in C è ridotta a un moto regolare (52), nè ſi alza, nè ſi abbaiſſa, devono eſſere eguali le due forze contrarie Fk , Di . E perche' i due triangoli FkG , DiE ſono ſimili, farà anche $FG = DE$, e $kG = iE$, cioè $Fb = Dm$.

63. E perche' il moto dell'aſta è equabile (52), e non accelerato, nè ritardato, le forze $nx + Dm$, che tendono ad accelerare il moto, faranno eguali alle contrarie $oy + Fb$, che tendono a ritardare lo ſteſſo moto; e perche' ſi è trovato $Fb = Dm$ (62), farà ancora $nx = oy$; o ſia $\int Qg = \int Tb$,

$$\text{cioè } \frac{7P \cdot (m-n)}{40b^2bi} \int (St)^2 \cdot Ss = \frac{7P \cdot (m-n)}{40b^2bi} \int (YZ)^2 \cdot Zz \quad (56, 59),$$

onde $\int (St)^2 \cdot Ss = \int (YZ)^2 \cdot Zz$ (A) prendendo le St da L fino in c , e le YZ da p fino in L .

64. E finalmente perchè l'asta viaggia parallela a se stessa (52) il centro delle forze nx , Dm dovrà coincidere col centro delle forze contrarie oy , Fb . Il primo dee cadere sopra il punto D , ed il secondo sotto il punto F . Dunque devono coincidere in un qualche punto V fra D , ed F . Quindi si

$$\text{avrà } nx : Dm :: VD : Vn = \frac{VD \cdot Dm}{nx}; \text{ ed insieme } oy : Fb :: VF :$$

$$Vo = \frac{VF \cdot Fb}{oy}. \text{ Dunque } Vn + Vo = \frac{VD \cdot Dm}{nx} + \frac{VF \cdot Fb}{oy}. \text{ Ma si}$$

è trovato $Dm = Fb$ (62), ed $nx = oy$ (63). Dunque

$$Vn + Vo = \frac{VD \cdot Fb}{nx} + \frac{VF \cdot Fb}{nx} = \frac{(VD + VF) \cdot Fb}{nx} = \frac{DF \cdot Fb}{nx}.$$

$$65. \text{ Ma } Vn + Vo = Pn + Po = \frac{\int P\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}g}{nx} \quad (58)$$

$$+ \frac{\int PT \cdot Tb}{oy = nx} \quad (61, 63). \text{ Dunque } \frac{DF \cdot Fb}{nx} = \frac{\int P\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}g}{nx}$$

$$+ \frac{\int PT \cdot Tb}{nx}, \text{ cioè } DF \cdot Fb = \int P\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}g + \int PT \cdot Tb$$

$$= \int \frac{7P \cdot (x-q) \cdot u^2 dx}{40bbi} \quad (57) + \int \frac{7P \cdot (q-x) \cdot u^2 dx}{40bbi} \quad (60)$$

$$= \frac{7P}{40bbi} \left(\int (x-q) \cdot u^2 dx + \int (q-x) \cdot u^2 dx \right).$$

$$66. \text{ E perchè } CB : Bq :: FG : Fb \text{ farà } Fb = \frac{Bq \cdot FG}{CB}$$

$$= \frac{Bq \cdot P}{b} \quad (54); \text{ e fatta } DF = e, \text{ farà } DF \cdot Fb = \frac{Bq \cdot Pe}{b} = (65)$$

$$\frac{7P}{40bbi} \times \left(\int (x-q) \cdot u^2 dx + \int (q-x) \cdot u^2 dx, \text{ cioè} \right.$$

$$Bq = \frac{7}{40bbi} \times \left(\int (x-q) \cdot u^2 dx + \int (q-x) \cdot u^2 dx \right) (B).$$

67. Fatti questi preparativi mi propongo da sciogliere il seguente problema. Date la lunghezza CB della porzione immersa dell' asta, la DF distanza del centro D di gravità dell' asta dal punto F di mezzo della sua porzione immersa, la velocità OL dell' asta, la velocità superficiale IK dell' acqua, e dato l' angolo ACI d' inclinazione dell' asta e in conseguenza il suo complemento BCq , trovare una curva KLH , o una retta KLQ' , che essendo scala delle velocità della verticale IS' soddisfaccia ai dati suddetti.

68. Primieramente esaminio il caso più semplice, cioè se una retta KLQ' soddisfaccia ai dati esposti. In questo caso le α invece di partire dal punto H partono dal punto Q' , e le HI , HO , HN divengono $Q'I = m$, $Q'O = q$, $Q'N = n$, e le St , ZY divengono Si , Zf , onde giusta il n. 63 qui si deve avere

$$\int (Si)^2 \cdot Ss = \int (Zf)^2 \cdot Zz. \text{ E perchè } Q'O : OL :: LS :$$

$$Si, \text{ farà } q : OL :: \alpha - q : Si = \frac{OL \cdot (\alpha - q)}{q}, \text{ e } \int (Si)^2 \cdot Ss = \int \frac{(OL)^2 \cdot (\alpha - q)^2 \cdot d\alpha}{q^2},$$

e (come si è detto al n. 56) integrando in modo, che quando $\alpha = Q'O = q$ l' integrale sia nullo, si avrà $\frac{(OL)^2 \cdot (\alpha - q)^3}{3q^2}$; e fatta indi $\alpha = Q'I = m$ si

$$\text{avrà } \int (Si)^2 \cdot Ss = \frac{(OL)^2 \cdot (m - q)^3}{3q^2}. \text{ Similmente } Q'O : OL :: LZ :$$

$$Zf, \text{ cioè } q : OL :: q - \alpha : Zf = \frac{OL \cdot (q - \alpha)}{q}, \text{ onde}$$

$$(Zf)^2 \cdot Zz = \frac{(OL)^2 \cdot (q - \alpha)^2 \cdot d\alpha}{q^2}; \text{ ed integrando così, che quan-}$$

do $\alpha = Q'N = n$ l' integrale sia nullo (59), indi facendo

$$\alpha = q \text{ si avrà } \int (Zf)^2 \cdot Zz = \frac{(OL)^2 \cdot (q - n)^3}{3q^2}. \text{ Dovendo pertan-}$$

to le due somme essere eguali (63) si trova $m - q = q - n$, cioè $OI = ON$. Il che fa vedere, che qualunque sieno le due velocità date IK , OL , purchè tutte le velocità della verti-

cale IS' terminino ad una retta, quella velocità OL dell' acqua, ch' è comune all' asta, corrisponde a un punto O , che dee essere di mezzo della IN , e che in conseguenza la velocità dell' asta in tal caso è la velocità media di tutte le velocità dell' acqua della verticale IN .

69. Essendosi detta al n. 54. $St=u$, in questo caso farà $u=Si=\frac{OL \cdot (x-q)}{q}$ (68), e $\int (x-q) \cdot u^2 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \times \int (x-q)^3 \cdot dx$. Fatto l' integrale nullo allorchè sia $x=QO$

$=q$, indi fatta $x=QI=m$, si avrà $\int (x-q) \cdot u^2 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \cdot \frac{(m-q)^4}{4}$. Essendosi pur detta $ZY=u$, in questo ca-

so farà $u=Zf=\frac{OL \cdot (q-x)}{q}$ (68); e $\int (q-x) \cdot u^2 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \int (q-x)^3 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \cdot \frac{(q-n)^4}{4}$ (fatto l' integrale nullo quando $x=QN$, e fatta indi $x=QO=q$). Dunque $\int (x-q) \cdot u^2 dx + \int (q-x) \cdot u^2 dx = \frac{(OL)^2}{q^2} \times \left(\frac{(m-q)^4}{4} + \frac{(q-n)^4}{4} \right) = \frac{(OL)^2}{q^2} \cdot \frac{(m-q)^4}{2}$ (essendosi trovato al n. 68 $m-q=q-n$). Dunque secondo il n. 66 farà $Bq=$

$$\frac{7}{40chi} \times \frac{(OL)^2}{q^2} \cdot \frac{(m-q)^4}{2} = \frac{7 \cdot (OL)^2 \cdot (m-q)^4}{80chiq^2}. \text{ Se si dirà}$$

$IN=c$, $IK=f$, $OL=g$, poichè $OI=ON$ (68), farà $OI=\frac{1}{2}c=m-q$. E perchè $QI:IK::QO:OL$, farà $m:f::q:g$,

e $q=\frac{gm}{f}$; ed $m-q=\frac{1}{2}c=m-\frac{gm}{f}$; onde $m=$

$$\frac{cf}{2 \cdot (f-g)}, \text{ e } q = \frac{gm}{f} = \frac{cg}{2 \cdot (f-g)}. \text{ Sostituendo si avrà}$$

$$Bq = \frac{7c^2 \cdot (f-g)^2}{320bie}.$$

70. Venendo a un caso particolare, in cui sia per esempio la velocità superficiale IK di 10 piedi per ogni minuto secondo, l'altra OL dell'asta di piedi 8, la $DF = e$ (53,66) = pi. 3; la caduta b di un grave in $1'' =$ piedi 15, il diametro i dell'asta di due pollici, o sia $= \frac{1}{6}$ di piede, la IN da dedursi dalla lunghezza CB note, e dall'angolo BCq dato, di piedi 12, e la IS' di piedi 14 farà $c = 12$, $f = 10$, $g = 8$, $e = 3$, $b = 15$, $i = \frac{1}{6}$, e Bq (69) = 1,68, cioè l'angolo BCq di gr. 7,58'.

71. Se pertanto l'angolo già dato farà di gr. 7,58', la vena KLQ' quadrerà esattamente a tutti i dati del Problema, e si potrà dire, che la KLd sia (almeno prossimamente) la scala della velocità della verticale IN ; e quando IN formi una buona parte della IS' si potrà ragionevolmente concludere, che tutte le velocità della verticale IS' terminino alla retta KL . Per la qual cosa essendosi detta IS' di piedi 14, l'aja $IS'IK$ farà di piedi quadrati 107,33, cioè in ogni minuto secondo per la verticale IS' passerà un velo di acqua di piedi 107,33 quadrati; i quali divisi per tutta l'altezza IS' di piedi 14 danno una velocità media di piedi $7\frac{2}{7}$.

72. Ma se in vece di gr. 7,58' fosse stato dato un angolo maggiore oltre gli altri dati del n. 70, si dovrà concludere, che le velocità della verticale IS' non terminano a una retta, ma bensì a una curva KLH . Per rinvenire una curva, che soddisfaccia ai dati io ricorro alla famiglia delle Parabole, giacchè ognuna di queste applicata come la HLK importa, che dalla superficie al fondo il decrescimento di velocità si faccia sempre maggiore, come richiede la mia teoria, che non discorda dalle sperienze.

73. Si esami ni pertanto in secondo luogo se la HLK fosse una parabola cubica di secondo genere della equazione px^2

$=y^3$. Poichè $y=\sqrt[3]{px^2}$ quando $x=Hu$ farà $dx=Ss$, ed $y=ut=\sqrt[3]{(px)^2}$; e quando $x=HO=q$ farà $y=\sqrt[3]{pq^2}$.

Dunque $St=ut-OL=\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}$, e $\int (St)^2.Ss$

$\int (\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}).dx$. Integrando per modo, che quando $x=HO=q$ l'integrale sia nullo; indi facendo $x=HI=m$ si avrà $\int (St)^2.Ss=\sqrt[3]{p^2}\left(\frac{3m^2\sqrt[3]{m}}{7}-\frac{6m\sqrt[3]{q^2m^2}}{5}+qm\sqrt[3]{q}-\frac{8q^2\sqrt[3]{q}}{35}\right)$. Quando poi sia $x=HX$ si avrà $dx=Zz$, ed $y=XR=\sqrt[3]{px^2}$, onde $RZ=OL-XR=\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}$, $\int (RZ)^2.Zz=\int (\sqrt[3]{pq^2}-\sqrt[3]{px^2}).dx$; ed integrando così, che quando $x=HN=n$ si abbia zero, indi facendo $x=HO=q$ si troverà $\int (RZ)^2.Zz=\sqrt[3]{p^2}\times\left(\frac{8q^2\sqrt[3]{q}}{35}-\frac{3}{7}n^2\sqrt[3]{n}+\frac{6n\sqrt[3]{q^2n^2}}{5}-qn\sqrt[3]{q}\right)$.

74. E perchè le due somme ritrovate devono esser eguali (63) si troverà $\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35}-\frac{3}{7}.(m^2\sqrt[3]{m}+n^2\sqrt[3]{n})$

$$+\frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}.(m\sqrt[3]{m^2}+n\sqrt[3]{n^2})-q\sqrt[3]{q}.(m+n)=0.$$

75. Poichè $St=u(54)=\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}(73)$, farà $\int (x-q).u^2dx=\int (x-q).(\sqrt[3]{px^2}-\sqrt[3]{pq^2}).dx=(\text{riducendo l'integrale al zero allorchè } x=q, \text{ indi facendo } x=m)$
 $\sqrt[3]{p^2}\times\left(\frac{3m^3\sqrt[3]{m}}{10}+\frac{3m^2\sqrt[3]{q^2m^2}}{4}+\frac{qm^2\sqrt[3]{q}}{2}+\frac{3qm^2\sqrt[3]{m}}{7}+\frac{6qm\sqrt[3]{q^2m^2}}{5}-q^2m\sqrt[3]{q}+\frac{5q^3\sqrt[3]{q}}{28}\right)$. Così perchè quando $x=HX$ si è detta $RZ=u(59)=\sqrt[3]{pq^2}-\sqrt[3]{px^2}(73)$, farà $\int (q-x).u^2dx=\int (q-x).(\sqrt[3]{pq^2}-\sqrt[3]{px^2})^2.dx=(\text{mettendo l'integrale } =0 \text{ quando } x=n, \text{ indi facendo } x=q)$
 $\sqrt[3]{p^2}$

$$\sqrt[3]{p^2} \times \left(\frac{5q^3 \sqrt[3]{q}}{28} + \frac{3n^3 \sqrt[3]{n}}{10} - \frac{3n^3 \sqrt[3]{q^2 n^2}}{4} + \frac{qn^2 \sqrt[3]{q}}{2} - \frac{3qn^2 \sqrt[3]{n}}{7} \right. \\ \left. + \frac{6qn \sqrt[3]{q^2 n^2}}{5} - q^2 n \sqrt[3]{q} \right).$$

76. Dunque $Bq(66) =$

$$\frac{7}{40ebi} \times \left(\int (x - q) \cdot u^2 dx + \int (q - x) \cdot u^2 dx \right) = \\ \frac{7 \sqrt[3]{p^2}}{40ebi} \times \left(\frac{3}{10} \cdot (m^3 \sqrt[3]{m} + n^3 \sqrt[3]{n}) - \frac{3}{4} \sqrt[3]{q^2} \cdot (m^2 \sqrt[3]{m^2} + n^2 \sqrt[3]{n^2}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} q \sqrt[3]{q} \cdot (m^2 + n^2) - \frac{3}{7} q \cdot (m^2 \sqrt[3]{m} + n^2 \sqrt[3]{n}) \right. \\ \left. + \frac{6}{5} q \sqrt[3]{q^2} \cdot (m \sqrt[3]{m^2} + n \sqrt[3]{n^2}) - q^2 \sqrt[3]{q} \cdot (m + n) + \frac{5q^3 \sqrt[3]{q}}{14} \right).$$

77. Colla equazione del n. 74 convien trovare nei casi particolari quale sia fra le infinite parabole della equazione $px^2 = y^3$ quella, che si potrebbe confare coi dati del Problema a riserva dell'angolo d'inclinazione dell'asta; per passare indi a vedere colla equazione del n. 76 se quella parabola così trovata si confaccia ancora coll'angolo dell'asta già dato. Perciò ritorno all'esempio del n. 70, dove si è fatta

$IK = 10$, $OL = 8$, $DF = e = 3$, $b = 15$, $i = \frac{1}{6}$, ed $IN = m - n = 12$. Quindi farà $n = m - 12$; e per la natura della parabola cubica di secondo genere farà $(IK)^3 : (OL)^3 :: (IH)^2 : (OH)^2$, cioè $1000 : 512 :: m^2 : q^2$; onde $q = m \sqrt[3]{\frac{512}{1000}}$

$= m - OI$. Dunque $m = \frac{OI \sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{512}}$. Poichè la somma dei quadrati delle St da L fino in c dev'essere eguale alla somma dei quadrati delle YZ da L fino in p (63), accade, che il punto O si trova sempre poco sotto il punto di mezzo della IN , onde se nella formola trovata

$\frac{OI \sqrt[3]{1000}}{\sqrt[3]{1000} - \sqrt[3]{512}}$ si metta $OI = \frac{IN}{2}$, si avrà un valore, che di poco mancherà dal giusto valore della m . Quindi perchè IN

si è fatta $= 12$, mettendo nella detta formola $OI = 6$ si avrà $21 \frac{2}{9}$, ch' è un limite della m , o sia un valore minore, ma di poco, della m .

78. Infatti si metta $m = 21 \frac{2}{9}$. Così farà $n = HI - IN = 21 \frac{2}{9} - 12 = 9 \frac{2}{9}$, e q (trovata qui sopra $= m \sqrt{\frac{512}{1000}}$)

$= 15,58$. Fatta la sostituzione di questi valori delle m, n, q nella equazione del n. 74, i termini, che la compongono, danno 0,002 (si veda il calcolo nel fine), il che mostra che si può prendere $21 \frac{2}{9}$ pel vero valore della m . E perchè

$p = \frac{y^3}{x^2}$, farà $p = \frac{(IK)^3}{(HI)^2} = \frac{1000}{m^2} = 2,109$. Sostituiti questi valori delle m, n, q, p nella equazione ultima del n. 76 si avrà $Bq = 1,78$, che dà l'angolo BCq di gr. 8,26'.

79. Quindi se l'angolo già dato (67) farà stato per l'appunto di gr. 8,26' la parabola cubica così trovata HLK quadrerà esattamente con tutti i dati del Problema, e si potrà dire, che la scala delle velocità della verticale IN sia assai prossimamente l'arco MLK della parabola suddetta, e qualora la NS' sia piccola porzione della IS' , farà ragionevole il concludere, che le velocità di tutta la verticale IS' terminino alla stessa parabola HLK . Quindi fatta la IS' di piedi 14, l'aja $IS'VK$, ch'è $\frac{3}{5}HI \cdot IK - \frac{3}{5}HS' \cdot S'V'$, farà di pie-

di quadrati 107,17; che esprimeranno la portata della verticale IS' , o sia il velo d'acqua, che in 1" passa per la verticale stessa. E dividendo per $IS' = 14$ il detto velo si avrà piedi 7,65, velocità media delle velocità da I fino in S' .

80. Che se l'angolo già dato (67) fosse maggiore del trovato qui sopra, si passi ad esaminare in terzo luogo se la curva ricercata fosse una parabola conica della equazione $px = y^2$.

81. Operando come si è fatto rapporto alla parabola cubica di secondo genere in luogo della equazione del n. 74 dedotta dal n. 63 si avrà $8\sqrt{q}(m\sqrt{m} + n\sqrt{n}) + 2q^2 - 6q \times (m + n) - 3m^2 - 3n^2 = 0$.

82. Ed in luogo della equazione del n. 76 dedotta dal

$$\begin{aligned} \text{n. 66 qui si avrà } Bq(66) &= \frac{7p}{40ehi} \times \left(\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{3}n^3 \right. \\ &- \frac{4}{5}\sqrt{q}(m^2\sqrt{m} + n^2\sqrt{n}) + \frac{4}{3}q\sqrt{q}(m\sqrt{m} + n\sqrt{n}) - q^2(m+n) \\ &\left. + \frac{4}{5}q^3 \right). \end{aligned}$$

83. Qui pure ripiglio, come al n. 77, le determinazioni fatte per l'esempio del n. 70, cosicchè essendo $IN = 12 = m - n$, farà $n = m - 12$; e per la natura della parabola conica farà $\overline{IK}^2 : \overline{OL}^2 :: IH : OH$, cioè $100 : 64 :: m : q = \frac{64m}{100}$. Ma

$$q = HO = HI - OI = m - OI. \text{ Dunque } \frac{64m}{100} = m - OI, \text{ ed}$$

$$m = \frac{100OI}{36}. \text{ Un limite della } m \text{ si troverà sempre colla rego-}$$

la del n. 77, cioè facendo l'ipotesi di $OI = \frac{ON}{2} =$ (in quest'

esempio) 6, onde qui risulta $m = 16\frac{2}{3}$. Si metta dunque

$$\text{prima } m = 16\frac{2}{3}. \text{ E farà } n = m - 12 = 4\frac{2}{3}; \text{ e } q = \frac{64m}{100}$$

$$= 10\frac{2}{3}. \text{ Sostituendo questi valori delle } m, n, q \text{ nell'equa-}$$

zione del n. 81, si ottiene 4, 73. Mettendo in appresso $m = 17$, farà $n = m - 12 = 5$, e $q = 10, 88$. Sostituiti questi nuovi valori delle m, n, q nella stessa equazione del n. 81, i termini che la compongono danno — 115, 61; il

che mostra, che il giusto valore della m sta fra il $16\frac{2}{3}$ ed

$$\text{il } 17; \text{ e col metodo noto si trova } m = 16, 68: \text{ onde } n = m - 12 = 4, 68, \text{ e } q = \frac{64m}{100} = 10, 67; \text{ e } p = \frac{(\overline{IK})^2}{IH} = \frac{100}{m}$$

$= 5, 99$. Sostituiti questi valori delle m, n, q, p nel va-

lore della Bq trovato al n. 82 si ha $Bq = 2, 11$, che dà l'angolo BCq di gr. 9. 58'.

84. Dunque se l'angolo già dato (67) fosse appunto di gr. 9, 58' la parabola conica trovata sarà in quest'esempio la curva ricercata, perchè soddisfa a tutti i dati del Problema; e fatta IS' di piedi 14 l'aja $IS'VK$ sarà di piedi quadrati 101, 46 portata della verticale IS' , che divisi per 14 danno la velocità media di piedi 7, 53.

85. Ma se l'angolo dato fosse fra i gr. 8, 26' trovati al n. 78, ed i gr. 10, 12' trovati al n. 83, si passi ad esaminare una qualche parabola intermedia. Mi spiego. Si metta l'equazione $px^{29} = y^{30}$, e si vada scemando l'esponente della x di una unità per volta accrescendo ogni volta pure di una unità l'esponente della p , e si avrà la serie di equazioni

$$px^{29} = y^{30}$$

$$p^2x^{28} = y^{30}$$

$$p^3x^{27} = y^{30}$$

ecc.

così si arriverà alle seguenti

$$p^{10}x^{20} = y^{30} \dots \dots \dots \text{cioè } px^2 = y^3$$

$$p^{11}x^{19} = y^{30}$$

$$p^{12}x^{18} = y^{30} \dots \dots \dots p^2x^3 = y^5$$

$$p^{13}x^{17} = y^{30}$$

$$p^{14}x^{16} = y^{30} \dots \dots \dots p^7x^8 = y^{15}$$

$$p^{15}x^{15} = y^{30} \dots \dots \dots px = y^2$$

$$p^{16}x^{14} = y^{30} \dots \dots \dots p^8x^7 = y^{15}$$

$$p^{17}x^{13} = y^{30}$$

$$p^{18}x^{12} = y^{30} \dots \dots \dots p^3x^2 = y^5$$

ecc. ecc.

Le dette equazioni cominciando dalla prima $px^{29} = y^{30}$, poste all'esame simile al già fatto delle due $px^2 = y^3$, $px = y^2$, danno un angolo sempre maggiore, cosicchè se l'angolo dato sarà fra i due ritrovati colle dette due equazioni converrà ten-

tare altri esami di alcune delle qui esposte quattro equazioni intermedie fra le dette due $px^2=y^2$, $px=y^2$, finchè si arrivi a quella, che soddisfaccia intieramente, o sufficientemente al Problema. E quando mai nè anche fra le dette quattro equazioni intermedie si trovasse quella, che quadri quanto si desiderasse, si potrà sempre istituire un' altra serie di equazioni, che parta da una cogli esponenti più alti, come farebbe se si partisse dall' equazione $px^{99}=y^{100}$, e per tal maniera c' incontreremo finalmente in una parabola, che soddisfaccia con quella precisione, che un volesse, al Problema.

86. Lo stesso discorso si applichi opportunamente al caso, in cui l'angolo dato fosse fra i gr. 7, 58' trovati al n. 70, ed i gr. 8, 26' trovati al n. 78; come pure si applichi al caso, in cui l'angolo dato fosse maggiore dell'angolo di gr. 9, 58' trovati al n. 83; con che parmi di avere sciolto il Problema propostomi al n. 67, che tende a trovare non tanto la portata della verticale IS' , quanto la legge dei decrescimenti della velocità della superficie fino al fondo.

87. Vedo benissimo, che quantunque si trovi una tal parabola, che quadri intieramente alle condizioni del Problema, non per questo è dimostrato, che la vera scala delle velocità sia quella stessa parabola, potendo essere, che nel tempo stesso la vera scala delle velocità fosse per esempio una ellisse. Ma ognun vede ancora che perchè una ellisse soddisfaccia a tutte le medesime condizioni del Problema, cui soddisfa una parabola, convien che quella ellisse si adatti così all' arco MLK della parabola trovata, che le conseguenze dedotte dalla Parabola debbano essere prossimamente quelle, che si dedurrebbero dalla ellisse.

88. Per agevolare il metodo esposto darò qui la formola generale del limite della m da trovarsi colla regola accennata al n. 77. Sia pertanto $p^x x^r = y^{c+r}$ l'equazione generale delle parabole. Poichè quando $x = HI$ è $y = IK$, onde $p^c (HI)^r = (IK)^{c+r}$, e quando $x = HO$ è $y = OL$, onde $p^c (HO)^r = (OL)^{c+r}$, farà $p^c = \frac{(IK)^{c+r}}{(HI)^r} = \frac{(OL)^{c+r}}{(HO)^r} = \frac{(OL)^{c+r}}{(HI-OI)^r}$, dal che si

trova $HI = m = \frac{OI\sqrt[3]{(IK)^{c+r}}}{\sqrt[3]{(IK)^{c+r}} - \sqrt[3]{(OL)^{c+r}}}$, ed $\frac{IN}{2}\sqrt[3]{(IK)^{c+r}}$,
 limite prossimamente minore della m (77).

89. Quindi se si dovesse prendere in esame l'equazione $p^3x^2 = y^5$ farebbe $c=3$, $r=2$, onde il limite farebbe

$$\frac{IN}{2}\sqrt[3]{(IK)^5} = (\text{giusta il n. 70}) \frac{6\sqrt[3]{10^5}}{\sqrt[3]{10^5} - \sqrt[3]{8^5}} = 14 \text{ prossi-}$$

mamente, limite della $m=HI$. Con questo solamente si conosce subito, che la equazione $p^3x^2 = y^5$ non può essere al caso contemplato finora di $IS' =$ piedi 14, perchè essendo $m =$ piedi 14, o poco più (77), il vertice H caderebbe quasi sul fondo del fiume, onde sopra quel fondo l'acqua non avrebbe quasi moto, il che non è vero.

90. Il Sig. Ab. *Ximenes* dice di aver trovato colle sue sperienze, che la velocità presso il fondo era di un quinto minore della velocità alla superficie. Ma quelle sperienze sono state fatte in piccoli corsi di acque, e crescendo la velocità cresce ancora la resistenza del medesimo fondo; per la qual cosa è da aspettarsi, che in tempo di piena la velocità dalla superficie al fondo cali sensibilmente più di un quinto. Inclino bensì a credere, che non arrivi a calare la metà. In questa ipotesi, che dee potersi verificare se non altro colle mie alte ritrometriche, pare che nell'esempio del n. 70. contemplato fin qui non possa aver luogo nè anche la parabola conica, giacchè questa nel detto esempio importerebbe un decrescimento di velocità dalla superficie al fondo più della metà, perchè per essere $HI = 16, 68$ (83), $IK = 10$, ed $HS' = 2, 68$, si trova l'ordinata SV al fondo di pi. 4, 008. Meno poi per una simil ragione possono appartenere al detto esempio le altre equazioni della serie del n. 85. dalla equazione $px = y^2$ in giù. Ma le portate della verticale IS' , che risultano colle equazioni della detta serie sino alla $px = y^2$ stanno fra i piedi quadrati 107, 17 (79), e 104, 14 (84),

che si discostano di poco dalla portata di pi. q. 107, 33 trovata al n. 71. nella ipotesi, che le velocità terminino ad una retta. Dunque quando non si cerchi la scala delle velocità, ma soltanto la portata della verticale IS' , e che non si curi di aver questa con tutto il rigore (il quale in molti casi è superfluo) si potrà ottenere l'intento a sufficienza (ed al certo cento volte meglio, che con qualunque degli altri metodi finora proposti) stando all'ipotesi, che le velocità terminino ad una retta, come al n. 71. Ed in questo caso si declina dal fastidio di quei calcoli prolissi, che occorrono nelle ipotesi, che la scala delle velocità sia una qualche curva, e l'angolo d'inclinazione dell'asta (ch'è il più difficile da rilevarsi) in questo caso basterà che si abbia affatto all'ingrosso, per poter dedurre da esso la Cq , la quale con tre, o quattro gradi di più, o di meno riesce sensibilmente la medesima.

91. Mi si potrebbe fare la seguente obbiezione. Non è così facile il trovare in ogni fiume un tratto di 200 tese, che sia così regolare, onde l'acqua vi corra con quella equabilità di moto, che richiederebbe lo sperimento; perchè anche nei tratti meno irregolari si danno delle ineguaglianze sensibili, e frequenti, per le quali la velocità dell'acqua varia non una, ma più volte ora crescendo, dove la sezione diviene alquanto minore, ed ora calando, dove la sezione si fa alquanto maggiore. Quindi è, che dove il fiume affretta il suo moto, l'asta a cagione della sua inerzia tarderà a concepire la velocità sua terminale conveniente a quel nuovo maggior corso dell'acqua, e rimarrà troppo indietro; e dove l'acqua rallenterà il suo moto, l'asta riterrà per la sua inerzia per qualche tempo una velocità maggiore del dovere, e scorrerà troppo avanti, il che può fare, che la velocità dell'asta discordi da quelle velocità, ch'io mi son figurato nella ipotesi di un corso equabile dell'acqua, e che perciò non sieno per valere le deduzioni da me esposte.

92. Ma qui rispondo, che le mie aste sono molto ubbidienti ai moti dell'acqua, cosicchè in un passaggio da una velocità ad altra l'errore indicato non può essere, che tenue, come spiegherò in appresso. E nel caso di parecchi di tai passaggi da una velocità minore ad una maggiore, e poi da una maggiore ad una minore, ecc. dico, che siccome l'errore al crescere

della velocità del fiume è in difetto, e nel calare della velocità del fiume è in eccesso, dandosi parecchi di tali errori nel tratto dello sperimento perchè all'uno in difetto dee succederne un altro in eccesso, dovrà accadere che l'uno compensi l'altro di mano in mano, cosicchè alla fine dello sperimento l'errore totale sia tuttavia tenue, e trascurabile.

93. Per fare poi comprendere, come ho promesso, che le mie aste ritrometriche devono essere molto ubbidienti ai moti dell'acqua, prima darò di questo una congettura forte dedotta dalla teoria, e poi verrò alla speriienza, e particolarmente ad uno sperimento immediato, e ch'io giudico decisivo, fatto colle aste medesime. Pertanto si metta, che una delle accennate aste galleggi verticale, e quieta in un'acqua stagnante, e che il suo centro di gravità cada appunto nel mezzo della parte sommersa. Allora l'acqua concepisca a un tratto una velocità orizzontale, ed eguale in superficie, e sotto la superficie. In tal caso si potrà considerare l'azione dell'acqua corrente contro l'asta come raccolta nel punto di mezzo della detta parte sommersa. E perchè nel medesimo punto cade anche il centro di gravità dell'asta, ne viene, com'è noto, che l'asta si muoverà sempre parallela a se stessa, e perciò verticale. La velocità dell'acqua si dica $=c$, e la velocità dell'asta, che sarà crescente, dopo un qualche tempo t si dica V , e la velocità rispettiva dell'acqua contro l'asta, cioè $c-V$, si dica u . Giusta il n. 56. farà $\frac{7Pu^2}{40bi}$.

L'impressione dell'acqua sopra l'asta, essendo P il peso dell'asta, b la caduta di un grave in un tempo $k=1''$, ed il diametro dell'asta cilindrica sia $=i$. Secondo le note formole si avrà $2b \cdot \frac{7Pu^2}{40bi} \cdot dt = kPdV$. E perchè si è detto $c-V$

$=u$ si troverà $\frac{7dt}{20ki} = \frac{dV}{(c-V)^2}$. Ed integrando così, che

quando $t=0$ sia $V=0$, si troverà $t = \frac{20ki}{70} \cdot \frac{V}{c-V}$.

94. Poichè gli aumenti, e decrementi di velocità, che possono accadere in un tratto del fiume scielto pel più regolare

fare non dovrebbe essere maggiore di un piede per ogni minuto secondo, si metta, che la velocità c , che si suppone al n. 93. concepita a un tratto dall'acqua prima stagnante, sia di un piede per ogni minuto secondo, onde sia $c = 1$; ed il diametro i dell'asta si metta di due pollici, o sia di $\frac{1}{6}$ di piede, e $k = 1''$, e si cerchi in quanto tempo l'asta avrà concepita la metà della velocità dell'acqua, e poi in quanto tempo avrà concepito $\frac{9}{10}$ della velocità stessa dell'acqua, per

la qual cosa si dovrà mettere pel primo caso $V = \frac{1}{2}$, e pel secondo $V = \frac{9}{10}$; e si troverà, che l'asta avrà guadagnato la metà della velocità dell'acqua in meno di un mezzo minuto secondo, e che l'avrà guadagnata quasi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in poco più di $4''$.

95. E se l'asta invece di essere verticale si trovasse inclinata con un angolo per esempio di 30 gradi, l'impressione $\frac{7Pu^2}{40bi}$ del caso precedente starebbe all'impressione di questo caso come il raggio al coseno di gr. 30 (56), cosicchè questa sarebbe prossimamente $\frac{3Pu^2}{20bi}$; e replicando il calcolo dei n.

93, 94 si trova $t = \frac{10ki}{3C} \cdot \frac{V}{c-V}$, e che l'asta avrà guadagnato la metà della velocità dell'acqua in $33'''$, e che l'avrà guadagnata quasi tutta, cioè $\frac{9}{10}$ in $5''$.

96. Se avessi attribuito all'acqua quella qualunque viscosità, che sembra non potersi negare all'acqua dei fiumi torbidi, il che avrei potuto fare nell'ultimo caso mettendo l'impressione dell'acqua $= \frac{3Pu^2}{20bi} + \frac{P}{V}$, intendendo per r un nu-

mero comunque grande (purchè finito), avrei trovato una puntualità anche maggiore dell'asta in concepire i $\frac{9}{10}$ della ve-

locità dell'acqua; anzi avrei trovato, che in breve avrebbe concepito tutta intiera la velocità dell'acqua. Ella è questa la da me indicata congettura forte dedotta dalla teoria per dire, che le mie aste siano per essere molto ubbidienti ai movimenti diversi dell'acqua, giacchè il caso qui supposto non è gran cosa diverso da quello delle aste, che impiego per la misura delle velocità de' fiumi.

97. Per altro la sperienza in questa materia vale anche più della teoria. Una sperienza molto ovvia sarebbe quella di gettare un qualunque galleggiante con una qualunque velocità, e direzione orizzontale in un' acqua stagnante. Si vedrà, che questo ben presto si riduce alla quiete. Argomento certo, che mettendo quello stesso galleggiante in un' acqua, che corra con qualunque velocità, quello pure con prestezza concepirà la velocità dell'acqua, come si può sperimentare in qualunque fiume. Ma eccomi all' accennato sperimento fatto colle aste medesime. Nel Po grande presso Ferrara entrato in una piccola nave ho abbandonato all'acqua due aste cilindriche di legno lunghe ognuna piedi $12\frac{1}{2}$ armate a un estremo di tanto piombo, che sono rimaste fuori dell'acqua con una porzione di un piede e mezzo circa, e dopo alcuni bilanciamenti l'una precedeva all'altra con una distanza di circa dieci piedi, ed ambe viaggiavano con moto equabile, e parallele a se stesse mentre io le seguitava in nave. Dopo qualche tempo con un legno biforcuto applicato colle due branche verso il punto di mezzo della parte immersa dell'asta d'avanti la ho spinta con forza accelerandone la sua velocità procurando di non alterare la sua positura, con che io la ho discostata di più dall'altra. Cessando indi di spingerla sono stato attento per vedere se in appressò continuava a discostarsi di più dall'altra a cagione dell'impeto da me impressole, il quale è certo, che non dovette essere smorzato dall'acqua meno veloce in un istante. Ma per quanto io, ed altri, ch'erano con me, ci impiegassimo di attenzione, non potemmo accorgerci di un maggior allontanamento, che fosse discerni-

bile all' occhio . Indizio manifesto , che l' asta da me posta in un moto sensibilmente maggiore di quello , che avea prima , ritornò alla velocità di prima quasi subito , o sia in un tempo molto breve . Lo stesso tentai coll' altr' asta più indietro spingendola contro il corso dell' acqua col mio legno biforcuto . Anche questa dopo che da me fu abbandonata , ricuperò la velocità dell' altra così presto , che la sua distanza dall' altra cessata la mia pressione non si fece maggiore , come avrebbe dovuto succedere se nel ricuperare la velocità primiera , e dell' altr' asta , avesse impiegato un tempo notabile . Desidero , che altri tentino lo stesso sperimento , ch' io giudico attissimo per far concludere , che le aste da me proposte devono essere di tutta quella puntualità in secondare i moti dell' acqua , che richiedesi per l' uso di esse da me proposto .

96. Dirò ora qualche cosa intorno al modo di preparare le aste . Se l' asta di legno destinata per lo sperimento sarà di poca lunghezza , per trovare quanto metallo vi si debba unire , acciocchè messa nell' acqua sporga sopra la superficie un piede o due , ciò si potrà ottenere facilmente mettendo l' asta nell' acqua di un qualche pozzo , ed attaccandovi all' estremo inferiore ora più , ed ora meno di metallo , finchè si veda , che l' asta abbandonata all' acqua si metta in una positura verticale rimanendo fuori dell' acqua quel piede o due , che si vorrà . Egli è però d' avvertire , che quell' asta di legno deve prima essere stata tenuta per qualche tempo sott' acqua acciocchè il legno s' imbeva di quella quantità di acqua , che può assorbire , particolarmente se il legno sarà secco , e poroso . Altrimenti si potrebbe dare , che nel principio dello sperimento l' asta sporgesse fuori dell' acqua per esempio un piede , e che nel fine non ne sporgesse fuori che un mezzo piede per essersi imbevuta alquanto di acqua nell' atto dello sperimento , e divenuta così alquanto più pesante .

97. Ma se l' asta sarà così lunga , onde non si abbia un pozzo con tant' acqua , che sia sufficiente pel sopra descritto esame , si potrà fare uso di un' acqua qualunque stagnante di qualche vasca , o buca *ABC* (*fig. 16.*) nella seguente maniera . L' asta sia da comporsi di due pezzi , cioè di uno *DE* di quattro in cinque piedi da unirsi all' altro *GH* con viti , o in altra maniera . Al pezzo *DE* si unifca tanto metallo in

F , onde posto nell'acqua o di un pozzo, o della buca stessa ABC , resti fuori dell'acqua con quella lunghezza DN , che si vorrà. Si trovi il centro di gravità dell'altro pezzo GH , o sia quel punto K , dal quale sospeso rimanga in equilibrio. Vi si attacchi uno spago IOI , e si metta sull'acqua AC , ed al punto O dello spago nella verticale KO si attacchi tanto metallo, che appena basti per fare, che il pezzo GH si sommerga tutto. Il metallo in O con l'altro in F farà la quantità di metallo da unirsi all'asta composta dei due pezzi GH , DE , onde questa così messa nell'acqua possa galleggiare con una porzione DN fuori dell'acqua, com'è manifesto. Non mancheranno altri metodi per trovare lo stesso, e forse più comodi secondo le circostanze. A me basta di averne indicato uno.

98. Trovata la quantità del metallo da unirsi all'asta faremo in libertà di attaccare lo stesso metallo a un estremo dell'asta dopo di averlo conformato in un cilindro del diametro dell'asta, o pure di unirlo all'asta incastrandovelo distribuito come si crederà più opportuno, purchè col legno venga a formare un cilindro solo. E qui avvertirò, che giusta l'equazione B del n. 66. la Bq (fig. 15.) è in ragione inversa della e , o sia della distanza del centro di gravità D dell'asta dal punto F di mezzo della parte sommersa CB . E perchè si può sempre unire il detto metallo all'asta distribuito in modo, che il centro di gravità D resti più o meno lontano da F , si vede che sarà in nostra mano il fare, che l'angolo BCq d'inclinazione dell'asta sia per riuscire maggiore o minore, giacchè quanto più D sarà vicino ad F il detto angolo farà maggiore.

99. Allorchè si avrà scielto quel tratto di fiume per lo sperimento, che sia il più regolare, e lungo circa 200 tese, o più, secondo che si crederà meglio, per sapere la lunghezza da darli alle aste, che si vorranno impiegare, converrà fare almeno tre sezioni di quel tratto, una nel mezzo, ed una per ogni estremo. Una di queste sia ABG (fig. 17.), colla quale si conoscerà la lunghezza FG da darli a un di presso all'asta, che dovrà viaggiare nel filone, e le lunghezze HI , DE da darli alle laterali: e lo stesso si dica pel caso, in cui se ne voglia impiegare più di tre; giacchè quante più se ne

impiegheranno, il rilievo sarà più preciso; e nel Po grande, affai largo, tre sarebbero sicuramente poche. Poi sarà bene il fare degli scandagli frequenti lungo il viaggio da farsi da ciascuna asta per rilevare se per avventura la lunghezza delle aste scelta colla sola ispezione delle tre sezioni fosse per qualcuna di troppo a motivo di un qualche dosso, che s' incontrasse in quel cammino.

100. Nel Po grande si può seguitare ogni asta con una nave, con che si potrà osservare con qualche precisione l'angolo d' inclinazione dell' asta per sapere prossimamente la scala delle velocità. E lo stesso si dica di tutti i fiumi navigabili almeno a seconda del loro corso anche in tempo di piena. E così si potranno ricuperare le aste per un altro sperimento. Il tempo, che ogni asta impiegherà nel correre la lunghezza stabilita, dovrà misurarsi o con un orologio a secondi, o con un pendolo a secondi. Nei torrenti converrà contentarsi di osservare l'angolo di ogni asta all' ingrosso (90) stando sulla riva, al più con l'occhio armato. Ed in questi per ricuperare le aste converrà accorrere alle curvature del fiume inferiormente al sito dello sperimento, dove il filone si accosta alla riva, e si fa, che i galleggianti finalmente vanno al filone. Nel resto mi rimetto all' avvedutezza, industria, e sagacità di quelli, che si accignessero ad esperimenti di questa fatta, che sono dell' ultima importanza per promuovere una scienza, dalla quale può dipendere la felicità, o l' estermio di paesi intieri, e che perciò merita d' essere protetta con impegno da più Sovrani.

Calcolo accennato al n. 78.

$$l.m = l.21 \frac{2}{3} \dots = 1.3380136$$

$$l.\sqrt{512} \dots \dots = 1.3546350$$

$$= 2.6926486$$

$$l.\sqrt{1000} \dots \dots = 1.5000000$$

$$l.q. = l.m \sqrt{\frac{512}{1000}} \dots = 1.1926486$$

$$l.n = l.9 \frac{2}{3} \dots \dots = 0.9902402$$

$$l.16 \dots \dots \dots = 1.2041200$$

X x x x jii

$l. q^2$	$\dots\dots\dots = 2.3852972$	
$l. \sqrt[3]{q}$	$\dots\dots\dots = 0.3975495$	
$l. 35$	$\dots\dots\dots = 1.5440680$	
$l. \frac{16q^2 \sqrt[3]{q}}{35}$	$\dots\dots\dots = 2.4428987$	n. 277,267
$l. 3$	$\dots\dots\dots = 0.4771212$	
$l. m^2$	$\dots\dots\dots = 2.6760272$	
$l. \sqrt[3]{m}$	$\dots\dots\dots = 0.4460045$	
	3.5991529	
$l. 7$	$\dots\dots\dots = 0.8450980$	
$l. \frac{1}{7} \cdot m^2 \sqrt[3]{m}$	$\dots\dots\dots = 2.7540549$	n. $\dots\dots\dots 567,616$
$l. 3$	$\dots\dots\dots = 0.4771212$	
$l. n^2$	$\dots\dots\dots = 1.9804804$	
$l. \sqrt[3]{n}$	$\dots\dots\dots = 0.3300801$	
$l. \frac{1}{7} n^2 \sqrt[3]{n}$	$\dots\dots\dots = 1.9425837$	n. $\dots\dots\dots 87,616$
$l. 6$	$\dots\dots\dots = 0.7781512$	
$l. \sqrt[3]{q^2}$	$\dots\dots\dots = 0.7950991$	
	1.5732503	
$l. 5$	$\dots\dots\dots = 0.6989700$	
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2}$	$\dots\dots\dots = 0.8742803$	
$l. m$	$\dots\dots\dots = 1.3380136$	
$l. \sqrt[3]{m^2}$	$\dots\dots\dots = 0.8920091$	
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2} \cdot m \sqrt[3]{m^2}$	$\dots\dots\dots = 3.1043030$	n. 1271,461
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2}$	$\dots\dots\dots = 0.8742803$	
$l. n$	$\dots\dots\dots = 0.9902402$	
$l. \sqrt[3]{n^2}$	$\dots\dots\dots = 0.6601601$	
$l. \frac{6}{5} \sqrt[3]{q^2} \cdot n \sqrt[3]{n^2}$	$\dots\dots\dots = 2.5246806$	n. 334,719
$l. q$	$\dots\dots\dots = 1.1926486$	
$l. \sqrt[3]{q}$	$\dots\dots\dots = 0.3975493$	
$l. (m+n)$	$= l. (21 \frac{2}{9} + 9 \frac{2}{9}) = 1.4990758$	
$l. q \sqrt[3]{q} \cdot (m+n)$	$\dots\dots\dots = 3.0892739$	n. $\dots\dots\dots 1228,213$
	fomm.	$\frac{1883,447}{1883,445}$
		$0,002$

Onde $\frac{16q^2\sqrt[3]{q}}{35} - \frac{3}{7}(m^2\sqrt[3]{m} + n^2\sqrt[3]{n}) + \frac{6}{5}\sqrt[3]{q^2}(m\sqrt[3]{m^2} + n\sqrt[3]{n^2})$
 $- q\sqrt[3]{q}(m+n) = 0.002.$



DIMOSTRAZIONE

Della riducibilità d' ogni quantità immaginaria algebrica alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$, adattata ad un Trattato elementare della natura delle equazioni.

Del Sig. SEBASTIANO CANTERZANI Professore di matematica, e Secretario perpetuo dell' Istituto delle Scienze di Bologna.

1. **I**l Sig. d' *Alembert* viene riconosciuto per il primo, che abbia dimostrato essere ogni immaginario riducibile alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$, dove A , B rappresentano due quantità reali di qualsivoglia forma. Egli ha data questa dimostrazione in una sua Memoria pubblicata tra quelle della Reale Accademia di *Berlino*, che appartengono all' anno 1746. Ma una tale dimostrazione non potrebbe aver luogo in un Trattato elementare della natura delle equazioni. Il Sig. *Ab. Bossut* nella sua *Algebra* al Cap. XVII dà una dimostrazione assai semplice, la qual vale per gl' immaginarj, che riguardati come valori di un' incognita portano ad equazioni algebriche. Questa dimostrazione però dipendendo parte da principj, che si trovano sparsi nel citato Capitolo, e parte ancora da qualche principio, che non si dimostra che ne' Capitoli seguenti, non pare che renda inutile del tutto il pensiero di riunire in un sol punto di veduta tutte le proposizioni, che sono necessarie a dedurla, e di farla insieme dipendere dal minor numero di principj, e dai più semplici che sia possibile. Egli è ciò che mi studierò di fare in questo breve scritto, prefiggendomi di formarlo in modo, che possa esser riguardato come parte di un Trattato elementare della natura delle equazioni.

2. È primieramente è noto, che ogni equazione, la quale non abbia tra i coefficienti de' suoi termini veruna quantità

tà immaginaria, se sia di grado dispari, ha sicuramente un valore della sua incognita reale; e se sia di grado pari, ed abbia l'ultimo termine negativo, ha sicuramente due valori dell'incognita reali, uno positivo, ed uno negativo. Questa verità è di tanta importanza nel presente argomento, che non sia inutile richiamarne a mente la dimostrazione.

E' chiaro, che ogni quantità reale messa nell'equazione in luogo dell'incognita sia assumere all'equazione un valor reale, il quale non sarà zero se non nel caso, in cui la quantità reale messa in luogo dell'incognita sia appunto uno de' valori, che può avere l'incognita in quell'equazione. E' chiaro ancora, che mettendo successivamente in luogo dell'incognita altre ed altre quantità reali crescenti, o decrescenti per gradi minimi, i successivi valori reali, che andrà ricevendo l'equazione, varieranno anch'essi per gradi minimi; di modo che passando gradatamente il valor, che si dà all'incognita, dall'esser a cagion d'esempio a ad essere b , gradatamente pure passerà il valor dell'equazione dall'essere quello, che corrisponde al primo valore a dell'incognita, il quale denoterò per A , ad essere quello, che corrisponde all'altro valor b dell'incognita, e che denoterò per B . Ora qualunque sia l'ordine, che tengono i valori reali dell'equazione nel passare che fanno dall' A al B , mentre i valori reali dell'incognita passano dall' a al b , egli è certo che facendosi quel passaggio gradatamente, e non per salti, non potranno far a meno di non trovarsi fra essi tutti i valori reali possibili intermedj tra A e B . Donde apparisce, che corrispondendo il valor reale A dell'equazione al valor reale a dell'incognita, e il valor reale B dell'equazione al valor reale b dell'incognita, ogni valore reale dell'equazione intermedia tra A e B dipenderà sicuramente da un valor reale dell'incognita intermedio tra a e b .

Ciò premesso, sia un'equazione di grado dispari x^{2n+1} ecc. $= 0$. E' manifesto che al valor reale $x = \infty$ corrisponde il valor reale dell'equazione ∞^{2n+1} , e che al valor reale $x = -\infty$ corrisponde il valor reale dell'equazione $-\infty^{2n+1}$. Dunque il valor reale zero dell'equazione, il quale è intermedio tra i due reali ∞^{2n+1} , $-\infty^{2n+1}$, dipenderà sicuramen-

te da un valor reale di x intermedio tra i due ∞ , e $-\infty$. Dunque l'equazione di grado dispari x^{2n+1} ecc. $= 0$ ha sicuramente un valor della sua incognita x reale.

Sia ora un'equazione di grado pari, che abbia l'ultimo termine negativo $x^{2n} \dots -s = 0$. Dato all'incognita il valor reale $x = \infty$, assume l'equazione il valor reale ∞^{2n} ; dato poi all'incognita il valor reale $x = 0$, assume l'equazione il valor reale $-s$. Ma il valor reale zero dell'equazione è intermedio fra ∞^{2n} , e $-s$; dunque dipenderà esso sicuramente da un valore reale dell'incognita intermedio fra ∞ , e 0 , il quale per conseguenza farà positivo. Similmente dato all'incognita il valor reale $x = -\infty$, l'equazione assume il valor reale ∞^{2n} , e dato all'incognita il valor $x = 0$, assume l'equazione il valor reale $-s$; dunque il valor reale zero dell'equazione, il quale è intermedio fra ∞^{2n} , e $-s$, dipenderà sicuramente da un valor reale dell'incognita x intermedio fra $-\infty$, e 0 , e per conseguenza negativo. Dunque ogni equazione di grado pari avente l'ultimo termine negativo ha sicuramente due valori dell'incognita reali, uno positivo, e uno negativo.

3. Egli è evidente da tutto ciò, che un'equazione, la quale abbia tutti i valori dell'incognita immaginarj, non può essere se non un'equazione di grado pari, e avente l'ultimo termine positivo. Donde segue, che proposta un'equazione, che abbia i valori dell'incognita parte reali, e parte immaginarj, se si farà la divisione dell'equazione pel prodotto di tutte le radici, che nascono dai valori reali dell'incognita, il quoziente, il quale farà il prodotto delle radici nate dai valori immaginarj dell'incognita, dovrà essere un'equazione di grado pari avente l'ultimo termine positivo. Ora a dire di questa specie d'equazioni conviene aver ricordate prima alcune cose, che verrò subito indicando.

4. In primo luogo ad ogni equazione, a cui soddisaccia il valore $x = C + D\sqrt[3]{(-1)}$, dee soddisfar anche il valore $x = C - D\sqrt[3]{(-1)}$, e viceversa. Infatti dopo d'aver posto nell'equazione in luogo di x , e delle sue potestà, il binomio $C + D\sqrt[3]{(-1)}$, e le rispettive di lui potestà, non possono i termini dell'equazione elidersi fra loro, e ridursi a zero, come convien che succeda, se $C + D\sqrt[3]{(-1)}$ è vera-

mente valor di x , senza che riducansi separatamente a zero elidendosi tra di loro i termini, che contengono $\sqrt{-1}$, e riducansi pure separatamente a zero elidendosi tra di loro i termini, che non contengono $\sqrt{-1}$, poichè è chiaro che gli uni non possono per modo alcuno elidersi con gli altri. Onde denotando per A la somma de' termini, che non contengono $\sqrt{-1}$, e per $B\sqrt{-1}$ la somma di quei, che contengono quel radicale, di modo che fatta la sostituzione del binomio $C + D\sqrt{-1}$ in luogo di x l'equazione divenga $A + B\sqrt{-1} = 0$, è evidente che non può verificarsi tale equazione, come si suppone, senza che si abbiano verificate le due $A = 0, B\sqrt{-1} = 0$. Ma messo in luogo di x nell'equazione l'altro binomio $C - D\sqrt{-1}$, il valor dell'equazione diventa $A - B\sqrt{-1}$, e per supposizione si ha $A = 0$, e $B\sqrt{-1} = 0$, e quindi anche $-B\sqrt{-1} = 0$. Dunque anche $A - B\sqrt{-1} = 0$, e però anche il binomio $C - D\sqrt{-1}$ adempie la condizione dell'equazione, e così è valore anch'egli dell'incognita. Dunque non può l'equazione aver per valore della sua incognita uno di que' due binomj senza aver anche l'altro.

5. Secondariamente dico, che se a , e b denoteranno due quantità reali, di qualunque forma elle sieno, la prima delle quali può anche supporli $= 0$, la radice di qualsivoglia indice intero, e positivo della quantità $a \pm b\sqrt{-1}$, cioè $\sqrt[r]{a \pm b\sqrt{-1}}$ farà sempre una quantità come $p \pm q\sqrt{-1}$, cioè della stessa forma che la proposta. Imperciocchè sia primieramente $n = 2^r$. Sarà

$$\sqrt[r]{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt[r-1]{\pm \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}}}. \text{ Ma general-}$$

$$\text{mente abbiamo } \sqrt{M \pm N} = \sqrt{\frac{M + \sqrt{M^2 - N^2}}{2}}$$

$$\pm \sqrt{\frac{M - \sqrt{M^2 - N^2}}{2}}, \text{ e però fatta } M = a,$$

$$N = \pm b\sqrt{-1}, \text{ si ha } \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} =$$

$$\sqrt{\frac{a + \sqrt{aa + bb}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{aa + bb}}{2}}, \text{ cioè}$$

$$= \sqrt[2^r]{\frac{a + \sqrt{(aa+bb)}}{2}} \pm \sqrt[2^r]{\frac{-a + \sqrt{(aa+bb)}}{2}} \sqrt[2^r]{(-1)};$$

onde denotando per c la quantità reale $\sqrt[2^r]{\frac{a + \sqrt{(aa+bb)}}{2}}$;

e per d l'altra quantità reale $\sqrt[2^r]{\frac{-a + \sqrt{(aa+bb)}}{2}}$, si avrà $\sqrt[2^r]{(a \pm b \sqrt[2^r]{(-1)})} = c \pm d \sqrt[2^r]{(-1)}$. Dunque

$$\begin{aligned} \sqrt[2^r]{a \pm b \sqrt[2^r]{(-1)}} &= \sqrt[2^r]{c \pm d \sqrt[2^r]{(-1)}} \\ \sqrt[2^r]{\pm (c \pm d \sqrt[2^r]{(-1)})} &= \sqrt[2^r]{a \pm b \sqrt[2^r]{(-1)}} = \\ \sqrt[2^r]{c \pm d \sqrt[2^r]{(-1)}}, &\text{ oppure } \sqrt[2^r]{a \pm b \sqrt[2^r]{(-1)}} = \\ \sqrt[2^r]{-c \mp d \sqrt[2^r]{(-1)}}. \end{aligned}$$

Qualunque si prenda di questi due valori, è sempre vero, che la radice 2^r esima della quantità $a \pm b \sqrt[2^r]{(-1)}$ si riduce alla radice 2^{r-1} esima d'una quantità della stessa forma, composta cioè di due parti, una reale affatto, l'altra formata d'una quantità reale moltiplicata per $\sqrt[2^r]{(-1)}$. Ora è evidente, che quel che si è dimostrato per la radice 2^r esima, vale per la 2^{r-1} esima, la quale si ridurrà così alla radice 2^{r-2} esima d'una quantità della stessa forma, e così via discorrendo: onde finalmente giungerassi ad aver ridotta la radice 2^r esima alla radice 2^{r-r} esima, cioè ad una quantità sempre della stessa forma, e non più posta sotto verun segno radicale.

Sia ora n un numero dispari. Suppongasi $\sqrt[n]{(a \pm b \sqrt[2^r]{(-1)})} = p \pm q \sqrt[2^r]{(-1)}$; e mutando il segno all'immaginario $\sqrt[2^r]{(-1)}$, farà $\sqrt[n]{(a \mp b \sqrt[2^r]{(-1)})} = p \mp q \sqrt[2^r]{(-1)}$. Dunque moltiplicando un'equazione per l'altra si avrà $\sqrt[n]{(aa+bb)} = pp+qq$, dove $\sqrt[n]{(aa+bb)}$ è sicuramente quantità reale, com'è evidente. Ma essendo $\sqrt[n]{(a \pm b \sqrt[2^r]{(-1)})} = p \pm q \sqrt[2^r]{(-1)}$, farà anche $a \pm b \sqrt[2^r]{(-1)} = (p \pm q \sqrt[2^r]{(-1)})^n$

$$= p^n \pm n \cdot p^{n-1} q \sqrt[2^r]{(-1)} - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2$$

$$\mp \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} p^{n-3} q^3 \sqrt{(-1)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p^{n-4} q^4 \\ \pm \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} p^{n-5} q^5 \sqrt{(-1)} \\ - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5.6} p^{n-6} q^6 \mp \text{ecc.}$$

la qual equazione dovendo esser identica, converrà che sia

$$p^n - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} p^{n-4} q^4 \\ - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4.5.6} p^{n-6} q^6 + \text{ecc.} = a.$$

Or quest' equazione non può contenere che potestà pari di q , comè si rende manifesto dall' osservare che le dispari non possono non aver annesso il radicale $\sqrt{(-1)}$, il quale in quest' equazione non può comparire. Dunque essendosi trovato $pp + qq = \sqrt[n]{(aa + bb)}$, e quindi $qq = -pp + \sqrt[n]{(aa + bb)}$, che è quantità reale, e però essendo reali anche tutte le potestà $q^4 = p^4 - 2p^2 \sqrt[n]{(aa + bb)} + \sqrt[n]{((aa + bb)^2)}$,

$$q^6 = -p^6 + 3p^4 \sqrt[n]{(aa + bb)} - 3p^2 \sqrt[n]{((aa + bb)^2)} + \sqrt[n]{((aa + bb)^3)},$$

$q^8 = \text{ecc.}$, fatte queste sostituzioni nell' equazione trovata

$$p^n - \frac{n(n-1)}{2} p^{n-2} q^2 + \text{ecc.} - a = 0 \text{ si avrà un' equazione in}$$

p del grado n *esimo*, cioè di grado dispari, e avente tutti i coefficienti de' suoi termini reali, la quale per conseguenza (*n. 2.*) avrà sicuramente un valor reale di p . Intendendo per tanto posto questo valor reale, qualunque sia la forma di lui, nell' equazione $qq = -pp + \sqrt[n]{(aa + bb)}$, avrassi il valor di q sotto la forma $\sqrt[n]{(-pp + \sqrt[n]{(aa + bb)})}$, il quale sarà reale, perchè tanto $\sqrt[n]{(aa + bb)}$, quanto p è reale, e non può mai essere $pp > \sqrt[n]{(aa + bb)}$, altrimenti si avrebbe q sotto la forma $\sqrt[n]{(pp - \sqrt[n]{(aa + bb)})} \sqrt[n]{(-1)}$, e quindi $q \sqrt[n]{(-1)}$ farebbe $= -\sqrt[n]{(pp - \sqrt[n]{(aa + bb)})}$, cioè farebbe reale, e così l' immaginario $\sqrt[n]{(a \pm b \sqrt[n]{(-1)})}$, che si è supposto $= p \pm q \sqrt[n]{(-1)}$ farebbe eguale a una somma di reali, il che è impossibile. Essendo dunque per l' equazione

$\sqrt[n]{(a \pm b \sqrt{-1})} = p \pm q \sqrt{-1}$ sempre sicuro un valor reale di p , ed essendo reale anche il valor corrispondente di q espresso per $\sqrt[n]{(-pp + \sqrt[n]{(aa + bb)})}$, resta dimostrato che $\sqrt[n]{(a \pm b \sqrt{-1})}$, anche quando n sia un numero dispari, è compreso sotto la forma generale $p \pm q \sqrt{-1}$, dove p, q denotano quantità reali.

Sia per ultimo n un numero pari, ma non della forma 2^r . Sarà egli della forma $2^r(2m+1)$, denotando r , ed m due numeri interi positivi quali si vogliano. E siccome è

$$\sqrt[n]{a \pm b \sqrt{-1}} = \sqrt[2m+1]{\sqrt[r]{a \pm b \sqrt{-1}}}, \text{ e si è già or ora ve-}$$

duto, che $\sqrt[2m+1]{a \pm b \sqrt{-1}}$ è sempre compreso nella forma generale $p \pm q \sqrt{-1}$, così potrássi intender

$$\sqrt[n]{a \pm b \sqrt{-1}} = p \pm q \sqrt{-1}, \text{ con che il radicale pro-}$$

$$\text{posto } \sqrt[n]{a \pm b \sqrt{-1}} = \sqrt[2m+1]{\sqrt[r]{a \pm b \sqrt{-1}}} \text{ diventerà}$$

$$= \sqrt[r]{p \pm q \sqrt{-1}}. \text{ Ma si vide già essere } \sqrt[r]{p \pm q \sqrt{-1}} \text{ riducibile sempre alla solita forma } c \pm d \sqrt{-1}. \text{ Dunque}$$

il radicale proposto, divenuto già $= \sqrt[r]{p \pm q \sqrt{-1}}$, potrà sempre intendersi ridotto anch' egli alla medesima forma $c \pm d \sqrt{-1}$.

Qualunque pertanto sia l' indice intero, e positivo del radicale, sotto cui si trova una quantità composta di due parti, una reale affatto, l' altra consistente nel prodotto d' una reale per l' immaginario $\sqrt{-1}$, sempre può intendersi il radicale ridotto alla forma stessa della quantità, che sotto di sè contiene. Se l' indice del radicale si volesse suppor rotto, o negativo, la formola potrebbesi sempre trasformar in un' altra, in cui il radicale riuscisse coll' indice intero, e positivo.

6. Da tutto ciò segue, che una quantità espressa comunque per radicali, sotto de' quali sieno ancora altri radicali, che ab-

bian pur anche sotto di sè altri radicali, e così via discorrendo, quando sotto ognuno, o sotto alcuni di quei radicali siavi una quantità reale moltiplicata o in tutto, o in parte per l'immaginario $\sqrt{(-1)}$, sempre potrà intendersi la proposta quantità ridotta alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$; perciocchè possono per le cose dette intendersi ridotti a questa forma i radicali ultimi più semplici, ridotti i quali si potran di nuovo intender ridotti alla stessa forma i nuovi radicali ultimi più semplici; e ridotti pure questi potran nuovamente intendersi ridotti quei, che dopo la passata riduzione son divenuti ultimi, e più semplici; e così di mano in mano finchè si giunga ad aver per radicali ultimi quei, che da principio eran primi, e più composti, ridotti i quali avrassi la quantità, che era per essi espressa, condotta alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$.

7. Resta da premettere anche una riflessione, ed è questa. Niuna quantità messa in luogo dell'incognita potrà mai ridurre i termini dell'equazione a distruggerli ed eliderli facendo che resti zero, quando non sia ella data, o vogliam dire espressa in qualche maniera per li coefficienti de' termini dell'equazion medesima, la qual cosa è per se stessa chiarissima, essendo evidente, che nell'equazione a cagion d'esempio $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ fin tanto che si mettano in luogo di x quantità, che non involvano in alcun modo le cognite a, b, c dell'equazione, sarà impossibile ottener la elision de' termini. Donde apparisce, che ogni valore dell'incognita d'un'equazione sarà sempre una quantità, o una formola, qualunque poi siane la forma, espressa in qualche maniera per le quantità cognite, o vogliam dire per li coefficienti de' termini dell'equazione stessa.

8. Premesse tutte queste cose sia ora un'equazione di grado pari avente l'ultimo termine positivo, $x^{2^{r(2m+1)}} + \dots + s = 0$, dove r ed m stanno in luogo di due numeri interi positivi, de' quali m può anche essere $= 0$. Pongasi

$$x = y \sqrt[2^{r(2m+1)}]{-1}$$
 e avrassi $x^{2^{r(2m+1)}} = -y^{2^{r(2m+1)}}$: le altre potestà inferiori della x si troveranno, com'è manifesto, eguali alle corrispondenti potestà della y moltiplicate ciascuna

per una quantità data per $\sqrt{-1}$ in modo da poterli sempre intender ridotta (n. 5.) alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$ denotando A, B quantità reali, delle quali potrà anche per alcuna di quelle potestà essere la $B=0$. Fatte pertanto le sostituzioni in luogo di x , e delle sue potestà, risulterà un'equazione in y dello stesso grado che la proposta, la qual e-

quazione avrà il primo termine negativo, cioè $-y^{\frac{r}{2(2m+1)}}$, l'ultimo positivo, cioè $+s$, e tutti gli altri moltiplicati o per una quantità reale, o per una immaginaria bensì, ma però tale da poter esser intesa sempre ridotta alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$. A rendere positivo il primo si muteranno i segni di tutti i termini di quest'equazione, con che riuscirà negativo l'ultimo termine, il quale diventerà $-s$; a togliere poi l'aspetto d'immaginerietà si sostituirà in ciascun de' termini, che ne sono affetti, in luogo del coefficiente una specie, come α nel secondo termine, β nel terzo, γ nel quarto, ecc. L'equazione in y così ridotta, essendo di grado pari, ed avendo negativo l'ultimo termine, avrà sicuramente (n. 2.) due valori dell'incognita y reali, e questi (n. 7.) dati per le quantità cognite reali nell'equazione medesima, tra le quali farà la quantità s , e per le specie α, β, γ , ecc. Restituendo in questi due valori di y in luogo delle specie α, β, γ , ecc. le quantità, alle quali erano esse state sostituite, le quali quantità sono tutte della forma

$A \pm B\sqrt{-1}$, diverrà ognun di loro una quantità data per s , e per li coefficienti dell'equazione proposta, involuti alcuni di questi in formole della forma $A \pm B\sqrt{-1}$. Ognun dunque di quei due valori di y potrà intenderli ridotto (n. 6.) anch'egli alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$. Ora moltipli-

cando ciascun di loro per $\sqrt{-1}^{\frac{r}{2(2m+1)}}$ diverrà egli valore di

$y^{\frac{r}{2(2m+1)}}\sqrt{-1}$, cioè di x . Avrà pertanto l'equazione proposta sicuramente due valori di x , ciascuno della forma

$(A \pm B\sqrt{-1})\sqrt{-1}^{\frac{r}{2(2m+1)}}$. Ma $\sqrt{-1}^{\frac{r}{2(2m+1)}}$ si riduce sempre (n. 5.)

(*n.5.*) alla forma $a \pm b\sqrt{(-1)}$. Dunque l'equazione di grado pari avente l'ultimo termine positivo avrà sicuramente due valori dell'incognita tali, che ciascun di loro sarà compreso sotto la forma $(A \pm B\sqrt{(-1)})(a \pm b\sqrt{(-1)})$, cioè $Aa - bB \pm (Ab + aB)\sqrt{(-1)}$, oppure $Aa + bB \mp (Aa - aB)\sqrt{(-1)}$, cioè (facendo $Aa \mp bB = M$, e $Aa \pm aB = N$) sotto la forma $M \pm N\sqrt{(-1)}$, nella quale potrebbe la quantità denotata per N riuscire $= 0$, e in tal caso il valore sarebbe reale.

9. Raccogliendo insieme le cose fin qui dette si può concludere 1°. che data un'equazione reale, cioè tale, che tutti i coefficienti de' termini sieno quantità reali, di qualunque grado ella siasi, e divisala pel prodotto di tutte le radici, che nascono dai valori dell'incognita per ottenere così nel quoziente il prodotto di tutte le radici, che nascono dai valori dell'incognita immaginari, si giungerà ad un'equazione reale di grado pari avente l'ultimo termine positivo (*n.3.*); 2°. che quest'equazione, la quale già per supposizione non ha verun valore dell'incognita reale, ne avrà sicuramente (*n.8.*) due immaginari, ciascun de' quali sarà contenuto sotto la forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$; 3°. che non potendo (*n.4.*) convenire all'incognita d'un'equazione il valore $a + b\sqrt{(-1)}$ senza che le convenga insieme il valore $a - b\sqrt{(-1)}$, e viceversa, ed essendo il prodotto di $x - a - b\sqrt{(-1)}$ in $x - a + b\sqrt{(-1)}$, che sono le due radici nate da que' due valori, una quantità reale, cioè $xx - 2ax + aa + bb$, divisa l'equazione per questo prodotto si otterrà una nuova equazione reale di grado pari avente l'ultimo termine positivo; 4°. che ripetendo per quest'equazione il discorso fatto per la precedente, e così di mano in mano, resta evidente che non vi può essere valor alcuno immaginario dell'incognita, che non sia compreso sotto la solita forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$.

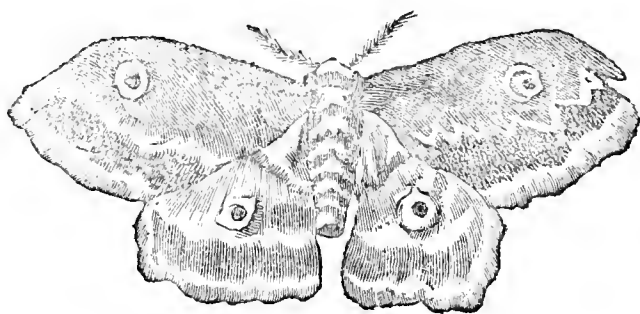
10. Siccome ogni quantità algebrica immaginaria, sia pur ella in qualsivoglia modo composta, messa $= x$ colle ordinarie operazioni dell'algoritmo, e principalmente coll'inalzamento dell'una e dell'altra parte dell'eguaglianza a congrue potestà, arriva finalmente a somministrare un'equazione reale, la quale avrà sempre tutti i valori immaginari della x compresi (*n.9.*) sotto la forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$; e siccome

è evidente doverli tra i valori immaginari della x di quest' equazione trovare la quantità algebrica immaginaria da principio proposta; così resta dimostrato, che ogni quantità algebrica immaginaria viene sempre compresa sotto quella forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, dove A , e B rappresentano due quantità reali.

11. L' esposta dimostrazione ha il vantaggio di far vedere, che per ogni equazione sono sempre possibili tra reali, e immaginarie tante formole date per li coefficienti dell' equazione medesima, quant' è il suo grado, ognuna delle quali posta in luogo dell' incognita verifichi la condizione facendo che i termini dell' equazione si elidano tra di loro, e riducasi la loro somma a zero. Questa verità si suole ordinariamente assumere dagli Autori: pure per un' equazione di grado pari avente l' ultimo termine positivo chi ne assicura che debba pur esservi una formola, se non reale, almeno immaginaria data per le cognite dell' equazione, che posta in luogo dell' incognita faccia svanir i termini? Il Sig. *Eulero* in una sua Memoria pubblicata nel 1749 tra quelle della Real Accademia di *Berlino* ha data, è vero, una dimostrazione di questa verità; ma oltrechè non sarebbe essa molto adattata ad un trattato elementare della natura delle equazioni, è poi anche soggetta ad alcune difficoltà rilevate dal Sig. Cav. *Daviet* de Foncenex in una Memoria inserita nel primo Tomo de' Miscellanei della Società di Torino. Dall' altra parte la dimostrazione sostituita da questo Autore a quella del Sig. *Eulero*, quanto è ingegnosa, ci sembra altrettanto superiore ancor essa alla portata di un trattato elementare.

12. Non mi estendo a dimostrar la riducibilità anche delle quantità trascendenti immaginarie alla forma $A \pm B\sqrt{(-1)}$, per non uscir dal confine, che in questo scritto mi son prefisso, tanto più che ella è questa una parte, che si trova già con molta semplicità ed eleganza trattata e dal Sig. Cav. *Daviet* de Foncenex nella citata Memoria, e dal celebre nostro P. Gregorio *Fontana* in una dotta dissertazione inserita nel Tomo primo delle *Memorie* della Società Italiana. Del resto quando uno dimostri, come questi Autori fanno, indipendentemente dal calcolo infinitesimale che $(a \pm b\sqrt{(-1)})^p \pm q\sqrt{(-1)}$ si comprende nella forma

$A \pm B\sqrt{-1}$, viene insieme a dimostrare la proposizione, che qui si è esposta al n. 5, giacchè $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{-1})}$ include si in $(a \pm b\sqrt{-1})^{p \pm q\sqrt{-1}}$ supponendo $q=0$. Ma si è creduto di dover trattare a parte la formola $\sqrt[n]{(a \pm b\sqrt{-1})}$ a fine di non aver per necessità da ricorrere al calcolo delle quantità circolari, e logaritmiche, da cui nel caso qui contemplato si poteva prescindere



S A G G I O

DI OSSERVAZIONI ANATOMICHE

Intorno agli organi della respirazione degli uccelli.

Del Sig. MIGHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia naturale, e Professore primario della medesima e di Notomia.

Al Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquee e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino.

L'Esposizione vostra anatomica intorno all'encefalo degli uccelli, che voi con gentile sorpresa, e con troppo obbliganti espressioni avete voluto dirigermi, m'invita, e m'obbliga doppiamente ad indirizzare a voi questa mia Memoria, e perchè veggiate quanto mi stiano a cuore i sentimenti vostri di urbanità ripieni e di cortesia, e perchè ancora conosciate in qual pregio io tenga la vasta estensione delle cognizioni vostre, e particolarmente anatomiche, le quali hanno saputo a tutta ragione conciliarvi la pubblica estimazione d'uomini per onestà e sapere ragguardevolissimi, e segnatamente d'uno dei più celebri filosofi, e naturalisti che viva Carlo *Bonnet*, e dell'immortale *Allero* anatomico e fisiologo insigne, la cui memoria farà non meno ai posteri, che ai viventi oggetto sempre di rispetto e di ammirazione. Nè meno certamente dovevate voi aspettarvi dalla pubblicazione dell'opere vostre, le quali voi avete voluto cortesemente favorirmi, poichè in esse si scorge per tutto il sollecito ed attento osservatore, il quale guidato a mano da una sana filosofia non osserva confusamente, e non iscrive per ostentazione, ma tutto esattamente ponderando procura di estendere per quanto possibil sia i limiti delle nostre cognizioni, come ne porge

ben chiara prova la vostra Encefalotomia universale . Questa tra le altre opere che pubblicate avete , e particolarmente l' Esposizione intorno agli uccelli , e quello che state tuttora scrivendo di questi chiama a sè , quand' anche altri motivi non vi fossero , queste mie osservazioni , che riguardano il soggetto medesimo , sebbene in organi differenti , essendo il principale scopo di queste le parti alla respirazione inservienti , ed il mirabile gioco dell'aria che in questo genere di viventi particolarmente si osserva . Se voi dunque le leggerete , se me ne direte il sentimento vostro , quand' anche le osservazioni vostre fossero alle mie contrarie , io ve ne averò sempre obbligo particolare , come lo averò a chiunque far ciò volesse con quelle maniere però che ad onesta e gentile persona convengono .

Non è certamente nuovo che gli uccelli abbiano gli organi della respirazione a differenza degli altri animali in modo particolare costruiti . Questa differenza però , per quanto io mi sappia , non è per anche stata riguardata con quella esattezza che un simile interessante argomento sembrava meritare , e se si eccettui il celebre Sig. *Gian Huntero* , il quale sino dal 1774 nelle Transazioni Filosofiche ha fatto prima di tutti accuratamente osservare che l'aria nei volatili dai polmoni e dalle vesciche aeree passa ancora nell' ossa , dando per altro di questo ammirabile fenomeno più un'idea generale che particolare e precisa , tutto rimane ancora nell'embrione di prima , e le descrizioni che ne abbiamo o sono di molto imperfette , o desunte piuttosto da una fervida immaginazione , che da vere ed esatte osservazioni .

Questo difetto , s'io mal non m'appongo , egli è nato non solo dalla somma difficoltà che s'incontra nel notomizzare negli uccelli gli organi della respirazione , ma ancora dalle varietà che si veggono negli organi medesimi ; poichè non solo nei differenti generi si riscontrano delle diversità rimarcabili , ma ben anche negli uccelli della specie medesima , e non di raro mi è avvenuto di vedere che nell' uccello istesso le vesciche aeree della destra parte non erano nè per la struttura nè pel numero a quelle della sinistra corrispondenti . E quello che diciamo di queste convien pur ripeterlo ancora di quella parte che chiamano laringe interna , poichè in alcuni uc-

celli è di crassi muscoli fornita, in altri n'è senza affatto; membranosa si vede in alcuni, in altri cartilaginosa, ossea in altri; in cert'uni poi è contratta assai, in altri meno, e finalmente in diversi non poco dilatata. Siccome però il descrivere tutte queste varietà sarebbe troppo lungo e spiacevole ancora, così voglio prima d'ogn'altro avvertito ch'io non darò che le diversità maggiori e più notabili che mi sarà avvenuto di vedere in quegli uccelli che furono da me osservati.

La trachea, o aspra arteria che negli uccelli è più o meno lunga a misura che gli uccelli hanno il collo più lungo o più breve, è un ampio canale che partendosi dalla parte posterior della bocca discende per tutta la lunghezza del collo, entra nella cavità del torace, e nei polmoni per cui l'aria passa alle parti interne, ed esce liberamente. Questa viene distinta in tre differenti parti, cioè in capo, tronco, e rami. Il capo che dicesi comunemente laringe è la parte superior della stessa, ed è costituita dietro la parte posterior della lingua. La struttura di questa disse l'*Hallero* esser simile, oppure analoga a quella dell'uomo, e certo se si eccettuino alcune differenze che sembrano rimarcabili, tra loro passa una grandissima analogia. Gli anatomici hanno negli uccelli considerate quattro cartilagini, cioè la cricoide, due aritenoidee, e la scutiforme; non pare però difficile il dimostrare se non l'epiglottide, almen altro simile che a questa corrisponda.

La cartilagine cricoide o annulare che nell'uomo s'alza posteriormente e si contrae anteriormente, negli uccelli è all'opposto dilatata all'innanzi, e contratta all'indietro, anzi ivi facendosi ossea produce internamente, e nel mezzo una picciola prominenza o sia tubercolo che corrisponde rettamente alla fessura superior della glottide. A questa picciola prominenza con mobile articolo si congiungono due picciole cartilagini che dalla loro sede corrispondono alle cartilagini aritenoidee destra e sinistra.

Queste cartilagini ossee hanno due processi, l'uno dei quali è superiore, inferior l'altro. Questo scorrendo sopra il margine laterale della cartilagine cricoide va a congiungersi anteriormente con la cricoide medesima, il superiore producendosi innanzi inclinato a vicenda da entrambi i lati interna-

mente , col mezzo di allungati e mobili legamenti si unisce con l'apice della cartilagine scutiforme . Questi processi sono in tal maniera costituiti , e così con gl' inferiori disposti che comprendendo tra loro un leggier solco rappresentano i legamenti della glottide , e la figura della glottide medesima .

La cartilagine scutiforme , che pur negli uccelli è ossea , è come composta di due ossetti , ma in così fatta maniera congiunti che mostrano la figura di due triangoli equilateri , i vertici dei quali convengono insieme . Questa cartilagine benchè possa a taluno sembrare un' addizione della cartilagine annulare , od anche , non senza ragione , una porzione fatta ossea della stessa cartilagine , pure siccome è manifesta e distinta assai massime nelle laringi essiccate , pare strano che il *Casserio* Anatomico diligentissimo non l'abbia almeno indicata , e particolarmente nei galli d' india , dei quali dà la figura , poichè in questi è così cospicua che internamente ancora ha un leggiero tubercolo che direttamente corrisponde alla prominenza interna della cartilagine annulare .

Rimane infine la cartilagine epiglottide qualora creder si voglia la laringe degli uccelli corrispondente a quella dell' uomo . Questa cartilagine sebbene distinta non si vegga , nè tale sia effettivamente , pure al disopra della cartilagine scutiforme evvi un processo che il *Casserio* chiamò processo digitato della cartilagine annulare . Quanunque però questo processo sia costituito in maniera che in vece di coprir la glottide sia tutto all' opposto rovesciato allo innanzi , e riguardi con l' ottuso apice la lingua , sembra ciò nonostante esser creato in maniera , onde prestar possa l' officio della epiglottide istessa . Si produce questo nell' intervallo che passa fra la glottide e la lingua , ed è posto in modo che può alla medesima accostarsi e rimoversi secondo il bisogno . Quindi nella deglutizione degli alimenti portandosi indietro la lingua , ed inalzandosi la laringe , ne avviene che duplicata al disopra del processo la membrana che copre il processo medesimo , rialzandosi , anche mercè d' una lunga cartilagine , che a guisa di leva dalla base dell' osso joide sotto al processo discende , faciliti alla membrana suddetta lo scorrere , e discendere posteriormente sopra la glottide , onde a guisa di valvula chiuda l' ingresso nella laringe agli alimenti che di-

scendono nell' esofago , compiendo così mirabilmente l' ufficio dell' epiglottide stessa.

Finalmente alla laringe degli uccelli non mancano i muscoli crico-aritenoidei dilatatori della glottide , nati dalla parte posteriore della cartilagine cricoide , ed inseriti nei processi delle cartilagini aritenoidee , nè mancano ancora gli jotiroidi elevatori della laringe nati dalla base dell' osso joides , ed inseriti ai lati della cartilagine scutiforme , come manifesti anco sono gli sterno-tiroidi depresso , i quali nati dallo sterno , ed inseriti nella parte inferiore dell' aspra arteria ascendono lateralmente sempre aderenti all' arteria medesima , ed hanno fine ai lati della cartilagine scutiforme . Da tutto questo sembra poterli credere con l' *Haller* essere la laringe degli uccelli simile o almeno analoga a quella dell' uomo , e per conseguenza influir essa pure nella varia modulazione delle voci .

Dalla laringe discende un lungo canale , che è il tronco dell' aspra arteria composta di perfetti anelli cartilaginei , il numero dei quali varia secondo la maggiore o minore lunghezza del canale medesimo . Questi sono insieme uniti da una membrana che discende dalla cartilagine annulare per tutta la lunghezza della trachea , la quale penetra nella cavità del torace , e termina verso la quarta vertebra dello stesso .

Questa mercè della membrana frapposta agli anelli si allunga , e si contrae per mezzo dei muscoli già descritti . Il diametro di questo canale non è sempre lo stesso , più spazioso d' ordinario si vede nel principio , indi insensibilmente si contrae conservando sempre la sua figura , la quale in altri è circolare , in altri ellittica . Giunto verso il fine si fa più ristretto , gli anelli si accostano più tra loro , perdono la loro figura facendosi più schiacciati , indi termina in un' allungata membrana piana e quasi contigua da entrambi i lati , da cui hanno origine i bronchi . Questa particolare struttura è quella che chiamano laringe interna , e che vien riputata l' organo principal della voce . Questa struttura però , che tale è appunto quale abbiamo descritta nei gallinacci , non è sempre la stessa negli altri uccelli , poichè per esempio nelle cicogne , e più ancor nei colombi la maggior latitudine della trachea è appunto nel fine , ove anche gli anelli più
si sco-

si scostano fra loro , e la frapposta membrana si fa più spaziosa . Da questa latitudine si può egli dedurre quella bassa voce , e profonda che costantemente hanno i colombi ? All' incontro debbonsi forse ripetere le acute e sonore dei cardellini , canarini , uffignuoli da un picciolo globo cartilaginoso , a cui sono aderenti piccioli muscoli , e l in cui termina la trachea , e principiano i bronchi ? Certamente qui non vi sono le membranose linguette che nei gallinacei abbiamo vedute , e che si annoverano tra gli organi principali della voce .

Questa varietà di struttura più mirabile ancora si mostra nei corvi , e nei papagalli . I corvi nel fine della trachea , che vedesi senza alcuna contrazione , hanno quattro elegantissimi muscoli due anteriori , e due posteriori , che tutti a guisa di piramidi costituiti ascendendo attaccati alla trachea , vanno estenuati insensibilmente a perdersi verò il decimo anello degli ascendenti della trachea stessa . All' opposto i papagalli nel luogo medesimo hanno due muscoli , uno per ciascun lato posti lateralmente , i quali , come in tre divisi , rappresentano la graziosa figura di un giglio rovesciato , le cui parti laterali vanno a terminare nell' estremità di due lamine ossee semilunari e quasi contigue , che compongono il fine ristretto della trachea ; quella di mezzo poi discendendo incurvata si va ad inferire nella parte convessa dei bronchi poco al disotto del loro principio . Questi muscoli come servono a contrarre la trachea ed i bronchi , influirebbero nelle forti e clamorose lor voci ?

Egli è certo che questa inferiore struttura della trachea ove principiano i bronchi , comunque costituita , è cagione della principale formazion della voce negli uccelli . Nei più volte abbiamo recisa ad alcuni di questi , viventi ancora , la parte superiore della trachea due dita in circa al disotto della laringe , ed abbiamo da questi ottenute quasi le voci medesime , come se loro l' aspra arteria recisa non fosse . Quindi in quegli uccelli ne' quali l' estremità di questo canale è conformato molto diversamente da ciò che fu detto , come nelle anitre maschi , nei quali in vece di restringimento , o di linguette membranose , oppure di muscoli , evvi una grande vescica ossea , la loro voce è rauca assai e molto dimeffa ; laddove nelle femmine che hanno un tubo osseo e ristretto , in-

feriormente diviso in due , da cui hanno origine i bronchi , le loro clamorose voci e penetranti affordano ed inquietano sommamente .

Ove termina l'aspra arteria ivi cominciano i bronchi , che sono i due suoi rami destro e sinistro , per mezzo dei quali l'aria passa dalla trachea nei polmoni . La struttura di questi è corrispondente a quella del tronco , con questa differenza però che gli anelli qui sono imperfetti , e rappresentano tanti semicircoli , che tengono la parte esteriore dei bronchi , mentre la parte interna è soltanto membranosa . Questi bronchi divaricati a vicenda , ed in alcuni uccelli superiormente uniti da un trasversale legamento , entrano nel polmone da entrambi i lati , indi in più rami e spaziosi divisi comunicano l'aria a tutto il polmone . In questi rami , e segnatamente ne' maggiori , si veggono delle membranette trasversali ascendenti che occupano la metà del lume dei rami medesimi . Queste membranette , per quanto dimostra la più scrupolosa osservazione , ad altro non sembrano esser fatte che per diriger l'aria per diverse e particolari vie , dappoichè fra ognuno degli interstizj , o vogliam dire delle cellette evvi il suo libero ed aperto pertugio che riceve l'aria , e la trasporta ad alcuni determinati condotti fuori del polmone costituiti . La natura , che nelle sue operazioni tanto è più mirabile quanto più semplice , non sembra aver già costrutte queste membranette perchè concorressero alla formazione della voce , come è opinione d'alcuni illustri e celebri autori ; poichè non pare molto ragionevole che la voce abbia a formarsi nella cavità dei polmoni e dei bronchi , essendo la laringe interna ed esterna per se medesime sufficienti a produrla .

I polmoni , che si aprono in larghe e spaziose celle , occupano nel torace quello spazio che è tra la prima e la settima costa . Questi non sono già liberi come nei quadrupedi , ma si ritrovano aderenti alle vertebre del torace , alle coste , ed ai muscoli intercostali . Non sono per tutto circondati dalla pleura ; quindi l'aria esce da loro liberamente , e passa ad altre cavità , delle quali in seguito parleremo . Dissi che non sono per tutto circondati dalla pleura , poichè questa ascendendo dalle parti laterali delle coste , e stendendosi sovra

di essi non copre che la parte loro anteriore e concava , e sta ad essi irregolarmente aderente . Da ciò ne avviene che lascia in alcune parti sotto di essa libero l'egresso e l'ingresso dell' aria , ed in alcuni luoghi trovandosi ancora perugiata ed aderente al polmone , dà alla medesima un facile e pronto passaggio . Questa membrana, per cui scorrono alcuni fascetti di fibre muscolari che vengono dalle vicine coste, è stata chiamata dal celebre *Huntero* il diafragma degli uccelli, *perchè scema la concavità dei polmoni verso l'abdome, e perchè concorre a dilatar le celle dell'aria*, il che certamente convenendo in parte coll' uso del diafragma merita che vi si abbia particolar riflessione . Io però niente togliendo a questo , sebbene altro non sembri essere che la pleura irregolarmente al polmone aderente, mi farò lecito di accennare un' altra membrana, a cui, se non sono di gran lunga ingannato , sembra che possa più adeguatamente convenire il nome e l' uso del diafragma . Questa, che costantemente si vede, è una membrana tra il pericardio ed il fegato costituita , la quale discendendo anteriormente va a congiungersi verso la parte inferiore dell' osso dello sterno, lateralmente con le coste, posteriormente con queste, con la spina, e con la parte superiore delle ossa della pelvi, circoscrivendo così le due cavità del torace e del ventre . Che questo sia il vero diafragma lo persuade 1.° l' attacco superiormente del pericardio con questa membrana, inferiormente col legamento sospensorio del fegato : 2.° le fibre carnosè che in alcuni uccelli , come nei corvi, carnosè si veggono scorrere per la stessa : 3.° la posizione sua che corrisponde a quella degli altri animali, e finalmente l' azione di questo sopra i visceri del ventre .

Questo diafragma, sebbene nell' espirazione ascenda e nell' inspirazione discenda , pure non giunge mai a toccare i polmoni , i quali , come fu detto, sono aderenti alla parte superior del torace . Questa nei volatili particolar adesione dei polmoni è una di quelle mirabili produzioni, delle quali la Divina Increata Sapienza ha voluto provvedere con singolar magistero gli abitatori dell' aria , onde nulla alle complicate e varie di loro azioni mancar potesse . E di fatto siccome l' aria nei quadrupedi si diffonde soltanto nei polmoni, così nei volatili passando liberamente da questi a molte altre cavità ,

non solo nelle parti molli, ma nelle ossa eziandio costituite; era di necessità assoluta che fermi fossero onde potere a queste per gli opportuni e pronti meati comunicar l'aria liberamente. Ora quali sian queste cavità, come e dove disposte, quali i meati dell'aria, fa d'uopo considerare.

Queste aeree cavità, oppur ricettacoli, o come chiamano comunemente vesciche, che sparse sono pel corpo degli uccelli, e che per vie particolari comunicano tutte immediatamente o mediatamente coi polmoni, sono fatte di una membrana trasparente e tenace, che differisce di molto da quelle della tunica cellulare, e sono in numero, figura, e capacità varie e ben differenti tra loro. Altre di queste si veggono nelle cavità del torace, altre nelle parti laterali di questo, altre nel collo, altre finalmente nel ventre.

Nel torace il quale ordinariamente si vede in due cavità laterali diviso destra e sinistra da una o più membrane, che figurano il mediastino, vi si riscontrano d'ordinario in ogni lato due ampie vesciche, la superiore delle quali alcuna volta è maggiore, tal'altra minore, ed in alcuni uccelli se ne veggono tre, e queste ultime poste ai lati del pericardio sotto allo sterno e molto minori, le quali però non vi sono sempre, nè da entrambi i lati costanti. La parte suprema poi del torace sotto all'osso lunare è tutta cava chiusa anteriormente da una ben distesa membrana simile alle descritte, la quale occupa tutto lo spazio che è fra le gambe del detto osso, e che discende sino alle clavicole. Questa spaziosa cavità aerea serve di comunicazione a molte altre minori laterali vesciche, che si veggono fuori della cavità del torace.

Queste laterali vesciche sono tre fra i muscoli, ed alla articolazione dell'omero mirabilmente distribuite. Queste si distinguono in superiori, medie, ed inferiori. Le superiori sono poste longitudinalmente sotto la scapula tra le coste e i muscoli intercostali, e subscapulari: le medie sono fatte a guisa di borsa tra l'estremità del muscolo pettorale maggiore e minore: le inferiori e minori dell'altre sono costituite sotto le medie, e corrispondono segnatamente al capo dell'omero. Oltre queste tre laterali vesciche ve n'è una quarta posta all'estremità della clavicola, e dell'osso lunare, che all'articolazione di quest'ossa corrisponde.

Nel collo si veggono ordinariamente due allungate vesciche una per ciascun lato che ascendono aderenti ai processi trasversali, ed ai lati delle vertebre, le quali in molti uccelli terminano verso la quarta o quinta vertebra delle ascendenti.

Nel ventre finalmente più vesciche vi sono, due delle quali sono costantemente maggiori l'una a sinistra, e l'altra a destra, e questa quasi sempre maggiore della sinistra, poichè nella parte inferiore ed estrema del ventre passa nella parte opposta in vicinanza, e quasi a contatto della sinistra. Queste vesciche da entrambi i lati discendono dal diafragma, e comprendono fra loro uno spazio che contiene il fegato, ed il ventriglio, in cui non entra mai aria. Oltre le due aeree cavità accennate altre ve ne sono aderenti alle ossa della pelvi, altre che discendono, e si cacciano tra gl'intestini per modo che tutto il ventre a riserva dello spazio descritto si può dire investito dall'aria e ripieno. Ora posta l'enumerazione di queste vesciche non andrebbe egli ingannato di molto chi volesse asserire su l'altrui autorità che dieci sono soltanto, cioè otto nel petto, e due nel ventre?

Tutte queste aeree cavità ricevono aria dai polmoni, che sono come centro comune di tutte. Nella superiore e laterale del torace entra l'aria per un foro, che si vede nel polmone e nella membrana che lo copre in vicinanza ai vasi che dal cuore penetrano nel polmone, e così nell'inferiore per un foro simile, ma maggiore, che è manifesto verso la metà della parte cava dei polmoni, ed in alcuni uccelli come nei colombi, galli, pernici, quaglie ecc. per un'apertura tra la membrana che copre il polmone e le coste, e nella suprema del torace per due spaziosi fori che si veggono tra l'esofago ed i bronchi, e che derivano dalla parte anteriore e superiore dei polmoni. Questa grande cavità poi è come un atrio da cui prendono aria le contigue laterali vesciche.

Alle superiori penetra per un'ampia bocca, e che costituisce quasi con la suprema una medesima cavità, che si vede al disopra dei vasi e nervi alari: alle medie per una larga fessura posta tra la cavicola e il muscolo subclavio; alle inferiori per un picciolo foro posto verso la estremità interna

del muscolo subclavio; alla quarta finalmente per un'apertura che si vede verso la estrema parte della clavicola ove si congiunge con l'omero.

I polmoni che superiormente si aprono in ispaziose celle mandano aria alle laterali del collo per due vie, che si scorrono nelle cavità superiori e laterali del torace, e che scorrono sopra i bronchi, e vasi polmonari.

Le vesciche finalmente del ventre sono dai polmoni abbondantemente corredate d'aria per due spaziose aperture che hanno inferiormente, e che corrispondono con altre simili che si veggono tra la parte posteriore del diafragma e il lembo superiore delle ossa della pelvi.

Le ossa non meno che le parti molli sono negli uccelli d'aria suscettibili. Non tutte però lo sono egualmente; poichè quelle che ammettono aria sono più leggieri e più bianche delle altre, ed hanno le celle ossee interamente, o per la maggior parte vuote. Nei corvi, nelle pernici, nelle cicogne ecc. l'aria passa speditamente nelle ossa della testa, in quelle della spina, nell'osso lunare, nelle scapule, nelle clavicole, negli omeri, nelle coste, nello sterno, nelle ossa della pelvi, ed in quelle dell'osso sacro. Allo incontro in quelli che furono da me cimentati il femore, le gambe, le ossa del piede, e così il raggio, e l'ulna, e quelle che corrispondono nei quadrupedi alle ossa del carpo, e metacarpo la escludono intieramente, giacchè le celle di questi ossi sono ripiene tutte, o in gran parte di midollo o di sostanza sanguigna. Nè solo quest'ossa escludono l'aria, ma nei galli, nelle quaglie ecc. l'aria non entra che per l'osso dell'omero, e della clavicola, ed in alcuni dell'omero soltanto. Ora veggiamo quali sian i meati pe' quali l'aria s'infonde nelle ossa accennate.

Nelle ossa della testa ascende l'aria per la tromba eustachiana, e quindi dal timpano si diffonde per le spaziose celle, o sia pel mediotullio di tutte le ossa, che pur voi nella vostra espolizione dell'encefalo degli uccelli avete notato essere un tessuto molto spugnoso, ed abbondante. Nei corvi evvi cosa che merita particolarmente di essere ricordata. Oltre le cellette che si veggono fra le due lamine componenti le ossa del cranio al disotto della seconda lamina discendono

infinite rette fibre, che a guisa di tante colonnette si vanno ad unire ad una terza lamina ossea sottilissima trasparente, che copre la dura madre, lasciando tra questa e la seconda uno spazio incirca d'una linea parigina, il quale viene dall'aria intieramente ripieno.

I polmoni, che come fu detto sono colla parte loro convessa e posteriore aderenti alla spina ed alle coste, comunicano immediatamente l'aria per alcuni forellini, che si veggono ai lati delle vertebre del torace non solo ai corpi delle vertebre stesse, ed ai processi delle medesime, ma passa ancora nel tubo spinale.

Inutilmente poi si cercherebbero nei corvi i passaggi dell'aria nell'estremità che riguardano il corpo dell'uccello nelle clavicole, nelle scapule, e nell'osso lunare, poichè in questi si veggono nella parte opposta, ove quest'osso si articolano fra loro: ordinariamente però, e nelle clavicole in particolare, servono a quest'uso alcuni piccioli rotondi orifizj, che si scorgono nella estrema interna parte di quest'osso, ove allo sterno si congiunge.

Perchè poi l'aria liberamente passasse nell'omero, pare che la natura vi abbia posto un particolare artificio. Presso al capo di quest'osso nella parte sua inferiore vi si scorge un seno profondo, e quasi circolare che sembra fatto appunto per raccogliere l'aria dalle inferiori laterali vesciche, alle quali diametralmente risponde, e per indi tradurla per un foro posto nella parte inferiore del seno in tutta l'interna cavità dell'osso medesimo.

E' già noto che negli uccelli vi si veggono da ogni lato due serie di coste, cioè le superiori, e le inferiori. Le superiori ricevono aria dai polmoni nelle loro estremità, ove si articolano con le vertebre; all'opposto le inferiori ove si congiungono collo sterno, e questo per alcuni forellini, che sono tra gl'interstizj delle articolazioni con le coste, oppure per alcuni spaziosi fori posti in quest'osso nella parte interna e superiore.

Il passaggio finalmente dell'aria nelle ossa della pelvi è nella parte interna delle ossa medesime in quel luogo che riguarda le reni, e nell'osso sacro per alcuni forellini posti ai lati delle vertebre componenti l'osso stesso, e che corri-

spondono ad alcune vescichette, che comunicano con le contigue del ventre.

Ecco come l'aria passa dalla laringe e dai polmoni alle ossa, ed alle vesciche tutte del torace e del ventre, e come tutte queste rimangono dall'aria riempite e distese. Sebbene però nel dar aria artificialmente alla trachea tutte ad un tempo e le vesciche del torace e quelle del ventre si gonfino insieme, e tutte ricevano aria nel tempo medesimo, pure nell'animal vivente si vede ad evidenza che nell'inspirazione si distendono quelle del torace, e si contraggono quelle del ventre, e così a vicenda nell'expiratione si distendono queste, e si contraggono quelle, rattenendosi sempre in questa maniera una porzione dell'aria inspirata, la quale vedremo in seguito esser non meno utile che necessaria.

Avendo finor veduto quali e quante sieno negli uccelli queste aeree vesciche, come e dove costituite, quali ossa sieno d'aria suscettibili, e quali i meati per dove l'aria passa a queste liberamente, resta ora a considerarsi a qual uso servir possa un così ammirabile e sorprendente meccanismo. Tre sono le congetture che sembrano ragionevoli: la prima, che queste vesciche sieno come tante appendici dei polmoni intervenienti a ricevere, ed a contener l'aria: la seconda che servano per facilitare il moto ed il volo agli uccelli: la terza per accrescere la forza delle lor voci, e per una più lunga protrazione del canto. Esaminiamone brevemente ciascuna.

Il celebre *Huntero* pensando a qual uso servir dovessero questi ricettacoli aerei ha creduto che questi si potessero calcolare come tanti serbatoj d'aria, i quali prestassero vantaggio grandissimo agli uccelli, togliendo loro quella difficoltà di respiro, alla quale volando vanno soggetti. A ciò fu egli condotto particolarmente dall'analogia che passa tra gli organi della respirazion degli uccelli e quella degli anfibi, come delle vipere, serpenti ecc., e siccome in questi i lunghi sacchi aerei di cui sono dotati fanno sì che possano respirare meno frequentemente degli altri, così ha pensato che questi ricettacoli produr potessero negli uccelli gli effetti medesimi. Io credo bene che questi ricettacoli prestar possano in alcune circostanze un qualche vantaggio alla respirazion degli uccelli, ma non però così da paragonarsi con quello degli

gli amfibj accennati . Gli animali freddi hanno senza comparazione alcuna minor bisogno di respirare dei caldi , ed è stato osservato che nel vuoto un ranocchio , una vipera ecc. campa più di quello che faccia un uccello , il che addiviene fra l' altre ragioni , perchè l' aria inspirata da quelli rattiene più a lungo le naturali sue qualità , che quella inspirata da questi . Quindi i ricettacoli aerei dei detti amfibj , che freddi animali sono , ponno somministrare alla loro tarda respirazione un vantaggio senza confronto molto maggiore che negli uccelli , i quali calidi essendo , e cangiando presto perciò la natura dell' aria inspirata , vengono da questo quasi ad una continua necessità di respirare eccitati .

Se questi ricettacoli però sono d' un leggier vantaggio alla respirazion degli uccelli , utilissimi sembrano al moto di questi ed al volo . E' già noto che i quadrupedi di qualunque genere sono dagli uccelli in celerità di gran lunga superati . Il più esercitato , più leggiero , e vigoroso cavallo non può fare più di trenta leghe in un giorno , nè il cervo più di quaranta , e l' immortale Sig. di *Buffon* aggiunge a questo come particolare assai l' esempio del corso di un inglese , il quale in undici ore , e trenta due minuti fece sessanta due leghe cambiando per altro ventuna volta i cavalli . Questa celerità , che nei quadrupedi è grande , è poco o nulla se confrontar si voglia con quella degli uccelli . Nota pure il Sig. di *Buffon* che la facilità con cui da noi si allontana un grosso uccello , un' aquila , un nibbio , un avvoltojo , e in meno di tre minuti si perde di vista , prova che può fare venti leghe in un' ora , e più assai di dugento in un giorno , calcolandosi ancora , oltre la notte , molti intervalli di riposo e di quiete . Non reca dunque meraviglia se in meno di sette od otto giorni le nostre rondinelle si portano dal nostro clima sotto la linea , e se si sono vedute in meno di otto o nove passare dall' Europa sulle coste del Senegal .

Per ispiegare questa grande lunghezza di volo gli osservatori di maggior considerazione sono ricorsi alla leggerezza , superficie , e disposizione delle piume , alla conformazione delle ali , alla loro estensione e solidità , alla forza dei muscoli , e finalmente alla leggerezza delle ossa , e del corpo . Io non negherò certamente che tutte queste cose non possano e deb-

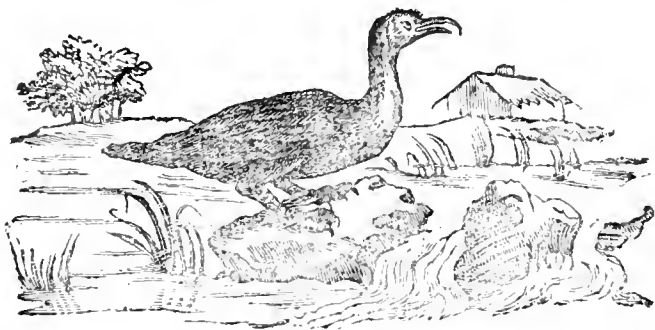
bano cooperare di molto alla speditezza e lunghezza del volo; ma io credo ancora che a ciò contribuiscano non poco le vesciche descritte, e l'aria che penetra ancora nelle cavità delle ossa. Abbiamo veduto, che tutta la cavità del torace, e quasi tutta quella del ventre è riempita di queste vesciche; ora nella inspirazion penetrando in queste l'aria, e distendendole, due non leggieri effetti produce, l'uno che rende maggiore la superficie dell' uccello, l' altro che lo rende specificamente più leggiero. Or chi non vede quanto da queste due mutazioni debba accrescersi la facilità e speditezza del volo? Una maggiore superficie viene ad essere con maggiore facilità sostenuta dalla colonna dell' aria, su di cui poggia; quindi quanto più facilmente viene a librarli su l' aria, tanto meno usa di fatica nel sostenerli, e tanto più facilmente può al volo abbandonarsi e far viaggio. Questa utilità, che merita certo in un lungo cammino la sua riflessione, maggiore ancora si fa dall' aria che inspira, la quale penetrando nelle vesciche, e nell' ossa, e fors' anche per fin nelle penne, che pur aria contengono, lo rende specificamente più leggiero; e più ancora perchè rarefacendosi cagiona per conseguenza negli uccelli una maggior leggerezza. Or questa rarefazione, che rende i volatili quasi a guisa di tanti palloni volanti, mostra ad evidenza quanto debba in loro influire e facilitare ancora l' azione e speditezza del volo. Quindi abbiamo veduto che nella maggior parte degli uccelli di gran volo, come nelle cicogne, corvi, pernici ecc. moltissime delle loro ossa sono vuote, e ricevono aria, là dove i gallinacci, che volano assai poco, non hanno d' ordinario che il solo omero che goda di questo vantaggio. Nè a questo si oppone, come venne creduto, fra gli altri l' esempio dello struzzo, la di cui struttura corrisponde a quella degli altri uccelli, sebbene non voli, poichè quantunque questo animale non s' alzi a volo, pure scorre con tanta velocità che supera ogni più fiero e generoso cavallo. Or questa rapidità di moto, e questa leggerezza in un uccello che per natura sua è grave assai e macchinoso, a cosa si deve ella mai attribuire se non se all' effetto dell' aria inspirata? Certo le ragioni addotte sembrano provarlo ad evidenza. Oltre ciò qualora lo struzzo s' abbandona al corso distende le ali, le agita leggermente,

e sembra ajutarsi in quella maniera però che le brevi di lui ali e disordinate penne glielo ponno permettere . Or questa azione di mover le ali , e più certamente negli altri uccelli viene fecondata ed ajutata non poco dalle laterali vesciche , che appunto stanno all' articolazione dell'omero . Ecco come questi ricettacoli aerei facilitar possono il moto ed il volo agli uccelli , il quale si rende in essi così facile e di sì poca fatica , che non di rado avviene che piacevolmente ne ascoltiamo alcuni , i quali in alto ancora , a leggier volo elevati , riempiono l' aria per lungo tratto di tempo delle melodiose loro voci .

Quelli che si sono occupati nel calcolare la forza di queste voci hanno osservato essere maggiore assai la voce degli uccelli che quella dei quadrupedi , ed è parere del lodato Sig. di Buffon , *che la voce di quelli sia non solamente più forte di quella di questi relativamente al volume dei loro corpi , ma anche assolutamente* , provando ciò coi fatti desunti dalle proprie osservazioni , e dalla fisica più scrupolosa . Una diversità così grande doveva certo riconoscere una causa corrispondente ; quindi hanno osservato che la trachea negli uccelli è più grande e più forte proporzionatamente che nei quadrupedi , i polmoni più estesi , e gli organi tutti della voce così disposti che sembrano formati per accrescerne l' intensità e la forza . Questa organizzazione però , che moltissimo può influire su la forza delle voci , poco o nulla servirebbe qualora gli organi stessi non fossero abbondantemente d'aria provveduti , in quella maniera che un organo musicale , per eccellente che sia , non manda voci se non che deboli e fiacche , s' egli non è di sostanza aerea sovvenuto copiosamente . Lo stesso dee pur dirsi negli uccelli , e siccome i ricettacoli aerei sono in questi quelle forgenti , che abbondante copia d' aria somministrano agli organi della respirazione , così da questi in massima parte dipender deve la forza maggiore delle lor voci . Quello che diciam della forza convien pure ripeterlo per la protrazione e modulazione del canto ancora . Chi v' è che non abbia più volte piacevolmente ascoltato il dolce e soave canto di un usignuolo , oppure di un canerino qualora senza mai prender fiato in lunghe e continue voci ed amorose pro-
rompe , e che non abbia ad un tempo stesso ammirate e la

748 INTORNO AGLI ORGANI DELLA RESPIRAZIONE ecc.
facilità e la lunghezza del canto medesimo? Tanta copia d'aria, tanta forza quanta a ciò richiedesi, e d'onde mai si può ella ripetere in così piccoli e delicati animalletti, se non ricorriamo alla particolare loro struttura, e segnatamente alle aeree vesciche? Non è però che alcune di queste siano più presto destinate al canto delle altre, come alcuno ha creduto, e che la cavità suprema del torace concorra meglio delle altre alla formazione della voce, e ciò perchè forata la membrana dell' osso lunare si perda la voce, poichè ciò non è particolare di questa, ma comune a tutte le altre, le quali aperte che siano, perdono aria, e tolgono per conseguenza l' alimento alla voce ed al canto.

Ecco quello che osservare ho potuto intorno agli organi della respirazion degli uccelli. Tornando a quello che già v' ho detto a principio, ho a voi dirette queste osservazioni e per averne il sentimento vostro che pregio assai, e perchè il mondo vegga la stima e l'amicizia, che vi professo, e che voi per moltissimi titoli meritate.



DELLE FORMOLE

DIFFERENZIALI

*La cui integrazione dipende dalla rettificazione
delle Sezioni coniche.*

Del Sig. GIAN-FRANCESCO Malfatti Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara.

1. **D**A che conobbero i Geometri darli un gran numero di formole differenziali, le quali ricusano di sottemetterli alla integrazione algebrica, o a quella specie d'integrazioni, che suppongono la quadratura del circolo e dell'iperbola, con somma avvedutezza pensarono, che molte di queste formole contumaci potrebbero essere integrate con archi di date ellissi, e di date iperbole; e perciò i loro studj rivolsero all'indagamento delle condizioni, di cui debbon le formole esser dotate, perchè oltre le quantità algebriche, che possono avervi luogo, le integri uno o più archi di sezion conica.

2. Tra quelli, che si distinsero in sì fatte ricerche, primo dee metterli il nostro celebre Italiano Conte Giulio Carlo de' *Fagnani* di Sinigaglia, che integrò l'arco della lemniscata, o sia della Cassiniana isocrona (*a*) colla rettificazione dell'arco ellittico e dell'arco iperbolico. Questi fu segui-

B b b b b iij

(*a*) E' già noto che la lemniscata, e la Cassiniana, che ha il lato del quadrato costante eguale alla semidistanza de' fuochi, sono la medesima curva. L'itocronismo poi di un grave, che discende per un suo arco qualunque cominciato dal punto del no-

do, e per la corda corrispondente, è stato da me dimostrato nel libro stampato a Pavia l'anno 1781, che ha per titolo: Della curva Cassiniana e di una nuova proprietà meccanica, di cui essa è dotata Trattato sintetico.

tato dal *Mac-Laurin*, che costrinse alcune formole a soggiacere alle suddette rettificazioni. Moltissime poi ne ridusse il Sig. d' *Alembert*, le quali son raccolte nel Trattato di calcolo integrale del Sig. di *Bougainville*; e vi han posto pur mano, ampliando sempre più la teoria, il Sig. *Lexell* ne' Comentarj della nuova Accademia di S. Pietroburgo, e il P. Vincenzo *Riccati*, che io nominerò sempre con sommo rispetto, nell' Opusc. 2. Tom. 2 de' suoi Opuscoli, e nelle Istituzioni analitiche; colicchè parer potrebbe, che la cosa fosse ormai ridotta alla sua perfezione.

3. Ciò non pertanto io trovo, che dovendo la variabile delle formole scorrere per tutti i valori, de' quali è suscettibile, quando nelle integrazioni entra l' arco iperbolico unito a quantità algebrica, appariscono in certe sue determinazioni delle quantità infinite di segno diverso, le quali lasciano incerto il Geometra sul valore di queste differenze, che può essere infinito, e alcuna volta ancora finito. Ove questo valor sia finito, io m' accingo a provare, non esser esso altra cosa che la differenza tra l' intero assintoto e l' arco infinito corrispondente di una data iperbola. Ed anche quando questo valore sia infinito, trasformati i termini in due altri, un de' quali sia la differenza suddetta, l' altro termine mi fa tosto conoscere la sua infinità, e per conseguenza la infinità dell' integrale della proposta formola.

4. Affinchè poi ne' casi pratici, in cui i simboli cangiansi in numeri, si possano avere i valori prossimi de' nostri integrali, presento una serie di notevole convergenza, e da nessun Geometra, per quel ch' io sappia, avvertita, la quale esprime il valore della differenza tra l' assintoto e l' arco d' iperbola infinito. Con che agevolansi al maggior segno i calcoli, e sgombransi quelle oscurità ed incertezze, nelle quali han lasciate involte le formole integrate i mentovati celebri Autori.

5. Gli archi ellittici, che per lo più mescolati cogli archi iperbolici compariscono nelle integrazioni, ci avvisano, che a certi valori della variabile possono rimaner trasformati in quadranti delle rispettive ellissi, e trovarsi eziandio in compagnia della differenza tra l' assintoto e l' arco infinito dell' iperbola. Onde siccome assegniamo la serie convergente,

che equivale a questa differenza, farà bene che accanto a questa si ponga pure la serie convergente, che rappresenta il quadrante ellittico. Si vedrà, che per le nostre formole dalle due serie unite ne risulta una terza elegantissima: e che il metodo, di cui ci serviamo, per arrivare a ciascuna delle anzidette serie, può esser utile ancora per le approssimazioni de' valori degli archi ellittici ed iperbolici, qualunque siasi la determinazione attribuita alla variabile delle formole.

6. Cominciam dalle serie, che riguardano gli archi ellittici. Nella ellisse VTu (*fig. 1*) di centro C , fuoco F , direttrice HH sia il semiasse $CV=a$; la distanza CA del centro dalla direttrice $=b$. Coll' intervallo del 1.^o semiasse CV si descriva da C il quadrante circolare VE , e il raggio CE segghi l' ellisse nel punto T : indi presa un' ascissa CP , si alzi all' ellisse e al cerchio l' ordinata PMN . Chiamato l' arco $EN=u$, farà $CP=\text{sen. } u$; $PN=\text{cof. } u$; e in oltre

$$CT = \frac{a\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b}. \text{ Ma sta per proprietà dell' ellisse } CE:CT::$$

$$PN:PM. \text{ Dunque } a:\frac{a\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b}::\text{cof. } u:PM; \text{ e però}$$

$$PM = \frac{\text{cof. } u\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b}. \text{ Il differenziale di questo per le note}$$

$$\text{regole è } = -\frac{du \cdot \text{sen. } u\sqrt{(b^2 - a^2)}}{ab}, \text{ e il suo quadrato}$$

$$= \frac{du^2 \cdot (\text{sen. } u)^2 (b^2 - a^2)}{a^2 b^2}. \text{ Così il differenziale di } CP, \text{ cioè}$$

$$\text{di } \text{sen. } u, \text{ è } = \frac{du \cdot \text{cof. } u}{a}, \text{ e il suo quadrato } = \frac{du^2 (\text{cof. } u)^2}{a^2}$$

$$= \frac{b^2 du^2 (\text{cof. } u)^2}{a^2 b^2}. \text{ Preso pertanto nell' ellissi l' archetto infi-}$$

nitamente piccolo Mm , farà

$$Mm = \frac{du\sqrt{(b^2 (\text{sen. } u)^2 - a^2 (\text{sen. } u)^2 + b^2 (\text{cof. } u)^2)}}{ab}$$

$$= \frac{du\sqrt{(b^2 - (\text{sen. } u)^2)}}{b}.$$

7. Coll' ajuto del canone newtoniano si rivolga in serie il radicale della formola, e troverassi;

$$\frac{\sqrt{b^2 - (\text{sen. } u)^2}}{b} = 1 - \frac{(\text{sen. } u)^2}{2b^2} - \frac{1 \cdot (\text{sen. } u)^4}{2 \cdot 4 b^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot (\text{sen. } u)^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 b^6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (\text{sen. } u)^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 b^8} \text{ ecc. senza limite. Dunque}$$

$$TM = \int \frac{du \sqrt{b^2 - (\text{sen. } u)^2}}{b} = (A) u - \int \frac{du (\text{sen. } u)^2}{2b^2} - \left(\int \frac{1 \cdot du (\text{sen. } u)^4}{2 \cdot 4 b^4} + \int \frac{1 \cdot 3 \cdot du (\text{sen. } u)^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 b^6} + \int \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot du (\text{sen. } u)^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 b^8} \dots + \int \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-3) (\text{sen. } u)^n du}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n \cdot b^n} + \text{ecc.} \right)$$

in infinito; dove n rappresenta un numero pari della serie 4, 6, 8 ecc. senza confine. Il calcolo poi de' seni e coseni circolari ci dà $\int du (\text{sen. } u)^2 = \frac{a^2 u}{2} - \frac{a \cos. u \text{ sen. } u}{2}$; e generalmente, quando n nella serie de' pari comincia dal num.^o 4;

$$\int du (\text{sen. } u)^n = \frac{(n-1)(n-3) \dots 3 a^n u}{n(n-2) \dots 4 \cdot 2} - \cos. u \left(\frac{(n-1) a^3 (\text{sen. } u)^{n-3}}{n(n-2)} + \frac{(n-1)(n-3) a^5 (\text{sen. } u)^{n-5}}{n(n-2)(n-4)} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5) a^7 (\text{sen. } u)^{n-7}}{n(n-2)(n-4)(n-6)} + \text{ecc.} \right), \text{ intendendo}$$

che la serie continui fino a che si arriva al termine di valore infinito. Quest' omogeneo di comparazione può essere espresso in altra maniera coll' invertire i coefficienti numerici, e le potestà che sono ne' termini. Sarà quindi

$$\int du (\text{sen. } u)^n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-1) a^n u}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots n} - \frac{a \cos. u (\text{sen. } u)^{n-1}}{n} - \cos. u \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-1) a^{n-3} \text{sen. } u}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots n} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (n-1) a^{n-5} (\text{sen. } u)^3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots n} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (n-1) a^{n-7} (\text{sen. } u)^5}{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots n} + \dots + \frac{(n-1) a^3 (\text{sen. } u)^{n-3}}{(n-2) n} \right).$$

$$\text{Per conseguenza } TM = u - \frac{a^2 u}{4b^2} - \frac{a \cos. u \cdot \text{sen. } u}{4b^2}$$

$$- 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (n-3)^2 (n-1) a^n u}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots n^2 b^n} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-3) a \operatorname{cof.} u (\operatorname{sen.} u)^{n-1}}{n (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n) b^n} \\
 & + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-3) \operatorname{cof.} u}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n \cdot b^n} \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n-1) a^{n-1} \operatorname{sen.} u}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} \right. \\
 & + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (n-1) a^{n-3} (\operatorname{sen.} u)^3}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots n} + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (n-1) a^{n-5} (\operatorname{sen.} u)^5}{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots n} + \dots \\
 & \left. + \frac{(n-1) a^3 (\operatorname{sen.} u)^{n-3}}{(n-2) n} \text{ ecc.} \right). \text{ Non s'aggiunge costante, per-} \\
 & \text{chè tutto svanisce, quando sono } u, \text{ e } \operatorname{cof.} u = 0.
 \end{aligned}$$

8. Si deve avvertire, che in questo secondo membro i termini, principiando dal quarto, non esprimono che i termini generali delle rispettive serie; e che per avere l'arco *TM* è necessario attribuire successivamente alla specie *n* tutti i valori che sono nella serie de' pari 4, 6, 8, ecc. in infinito. Risulteran quindi infinite serie convergenti, una delle quali appartiene ai termini, ov' entra l'arco *u*; le altre spettano alle potestà di *sen. u*; e queste ultime non solo son convergenti, ma di più d'una convergenza crescente a misura che crescono le suddette potestà. Per la qual cosa è facile il conoscere, che assegnati competenti valori numerici ai simboli *a*, *b*, *u*, si potrà con non molto calcolo determinare il valor prossimo di qualunque arco *TM* della ellissi.

9. Vogliasi presentemente la serie, che esprime il quadrante ellittico *TV*, che chiamo \mathcal{Q} . In tal caso diventa *u* = alla 4^a parte *EV* della circonferenza circolare, *sen. u* = *a*, *cof. u* = 0; e denominata col simbolo ϕ la circonferenza di raggio 1, avremo $\mathcal{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a^3\phi}{2 \cdot 4b^2}$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{(n-1)}{2} \frac{(1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (n-3)^2 a^{n-1} \phi)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots n^2 b^n}. \text{ Posto } n=4, \text{ l'ul-} \\
 & \text{timo termine si fa } = \frac{-1^2 \cdot 3 a^3 \phi}{2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 b^4}. \text{ A } n=6 \text{ corrisponde il ter-} \\
 & \text{mine ultimo } = \frac{-1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 a^7 \phi}{2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 b^6} \text{ ecc. colla legge che è manifesta.}
 \end{aligned}$$

Dunque $(B) \mathcal{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2} \left(\frac{1 \cdot a^2}{2^2 b^2} + \frac{1^2 \cdot 3 a^4}{2^2 \cdot 4^2 b^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 a^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 b^6} \right. \\ \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 a^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 b^8} \text{ ecc.} \right)$, cioè ove A, B, C, D ecc. rappresentano i termini precedenti; $\mathcal{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2} \left(\frac{1 \cdot 1 a^2}{2^2 b^2} + \frac{1 \cdot 3 a^2 A}{4^2 b^2} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5 a^2 B}{6^2 b^2} + \frac{5 \cdot 7 a^2 C}{8^2 b^2} \text{ ecc.} \right)$. La serie del 2°. membro di queste due equazioni è convergente, perchè i numeri de' denominatori in tutti i termini son maggiori de' numeri de' numeratori, e perchè $\frac{a}{b}$ in tutte le ellissi è minore dell' unità; onde ne' casi particolari sarà facilmente reperibile il valor prossimo di \mathcal{Q} .

10. Passiam' ora a trovar la serie, che eguagli la differenza tra l' asintoto e l' arco iperbolico infinito. Sia l' iperbole VMM' (fig. 2) de' due semiasse CV, VT , cosicchè CTD divenga il suo asintoto. Coll' istesso vertice primario V , e i semiasse eguali ad VC si descriva l' iperbola equilatera VNN' , il cui asintoto sia CL . Assunta un' ascissa CP , vi s' adatti PMN ad angolo retto, che intersechi l' asintoto CD in D , e divenga PM l' ordinata dell' iperbola VM , PN l' ordinata dell' equilatera VN . Da M poi all' asintoto CD si guidi la $M\mathcal{Q}$ parallela all' altro asintoto Ci , e la MG , che compie il rettangolo de' lati MP, CP , tagli l' asintoto CD nel punto O .

I. Sarà $CV:VT::PN:PM$. Perchè, per proprietà dell' iperbola equilatera, abbiamo $(CP)^2 - (CV)^2 = (PN)^2$. Ma l' altra curva ci somministra l' analogia $(CP)^2 - (CV)^2: (PM)^2 :: (CV)^2: (VT)^2$. Dunque $(PN)^2: (PM)^2 :: (CV)^2: (VT)^2$; ovvero $CV:VT::PN:PM = \frac{VT \cdot PN}{CV}$.

II. Essendo HH la direttrice dell' iperbola VM , e F il suo foco, sarà $CA:CV::PN:CO$. Perchè la teoria delle sezioni coniche c' insegna, che sta $CA:CV::CV:CF = CT$; e pei triangoli simili DMO, DPC ; $PD:CD::VT:CT::PM:CO$. Ma pel num.º I. $CV:VT::PN:PM$. Dunque $CV:$

$$CT :: PN : CO, \text{ ovvero } AC : CV :: PN : CO = \frac{CV \cdot PN}{CA}.$$

III. $OG = PN$; $MO = CP - PN$. Imperciocchè $CT : CV :: CO : OG$, e perchè $CT : CV :: CV : CA$, farà anche $CV : CA :: CO : OG$. Ma, per l' antecedente numero, $CV : CA :: CO : PN$. Dunque $OG = PN$, e in conseguenza $MO = GM - OG = CP - PN$.

$$\text{IV. } OQ = \frac{CV(CP - PN)}{2CA}; CQ = \frac{CV(CP + PN)}{2CA}. \text{ Si tiri}$$

VZ parallela all' asintoto Ci . Siccome TV è la metà di Ti , così TZ è la metà di TC . Ma i triangoli TVC , DMO son simili e similmente posti; in oltre MQ è parallela ad VZ . Quindi anche MQ dividerà per mezzo la DO . Ora sta $CV : CT :: CA : CV :: MO : OD$, e però $CA : CV :: CP - PN$ (III):

OD . Avrem dunque $OD = \frac{CV(CP - PN)}{CA}$, e conseguentemente

$$\text{te } OQ = \frac{CV(CP - PN)}{2CA}. \text{ E perchè } CQ = CO + OQ$$

$$= \frac{CV \cdot PN}{CA} \text{ (II)} + \frac{CV(CP - PN)}{2CA}, \text{ risulterà}$$

$$CQ = \frac{CV(CP + PN)}{2CA}.$$

V. Non cangiano le cose dimostrate ne' precedenti numeri, ancorchè l' iperbola VM cadesse superiormente all' equilatera VN , cioè il semiasse secondo fosse maggiore del primo.

VI. Si conduca CLN' asintoto dell' iperbola equilatera, e si produca VT fino a questo asintoto in L , farà $CV = VL$. Ora l' estremo punto dell' asintoto infinito CLN' coincidendo in un punto infinitamente lontano della curva, se supporremo CP , PN divenute le infinite CP' , $P'N'$, N' cadrà precisamente dove l' asintoto incontra l' iperbola, ed avremo il triangolo infinito CPN' simile al triangolo CVL . Ma $CV = VL$. Dunque l' infinita ascissa CP' è eguale all' infinita ordinata $P'N'$.

VII. Raccoglieremo da ciò, che essendo in genere la porzione asintotica $CQ = \frac{CV(CP + PN)}{2CA}$ (IV), pel caso dell'

Ccccc ij

ascissa e dell' ordinata infinite , diventerà l' intero affintoto

$$CTM' = \frac{CV \cdot CP'}{CA} = \frac{CV^2 \cdot CP'}{CA \cdot CV} = \frac{CV \cdot PN}{CA}.$$

VIII. La TK parallela all' asse primario CV determina la CK eguale al 2.° semiasse: Ora il num.° I. ci presenta

$$PN = \frac{CV \cdot PM}{TV} = \frac{CV \cdot CG}{CK}. \text{ Il perchè nell' ipotesi delle coordinate infinite , cangiandosi } CG \text{ nell' infinita } CG' = P'M', \text{ farà l' affintoto } CTM' = \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CG'}{CK}; \text{ il che serve per gli archi iperbolici , che si riferiscono al 2.° asse , quand' essi divengono infiniti .}$$

II. Queste nozioni premesse , chiamo $CV = a$, $CA = b$; il doppio settore CNV diviso per $CV = u$, onde risulta $CP = \cos. \text{ iperb.}^\circ u$, $PN = \text{sen. iperb.}^\circ u$; e pel num.° I ,

$$PM = \frac{VT \cdot \text{sen. ip.} u}{a}. \text{ Il differenziale di } CP \text{ si fa}$$

$$= \frac{du \cdot \text{sen. ip.} u}{a}, \text{ e il differenziale di } PM = \frac{du \cdot VT \cdot \cos. \text{ ip.} u}{a^2}.$$

Ma , preso l' archetto minimo Mm , il quadrato di questo archetto è eguale alla somma de' quadrati de' due suddetti differenziali . Dunque , poichè $CT = CF = \frac{a^2}{b}$, e $(\cos. \text{ ip.} u)^2 - (\text{sen. ip.} u)^2 = a^2$, si avrà $Mm = \frac{du \sqrt{((\cos. \text{ ip.} u)^2 - b^2)}}{b}$.

12. Per integrare questa formola , butto in serie il radiale , e mi nasce ; $\sqrt{((\cos. \text{ ip.} u)^2 - b^2)} = \cos. \text{ ip.} u - \frac{b^2}{2 \cos. \text{ ip.} u}$

$-\frac{1 \cdot b^4}{2 \cdot 4 (\cos. \text{ ip.} u)^3} - \frac{1 \cdot 3 b^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 (\cos. \text{ ip.} u)^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 b^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 (\cos. \text{ ip.} u)^7}$ ecc. senza limite. Questa serie è convergente , perchè le quantità numeriche sono maggiori ne' denominatori de' termini , che ne' numeratori , e di più in tutte le iperboli $\cos. \text{ ip.} u > b$.

Sicchè $\int Mm = VM = (C) \int \frac{du \cdot \cos. \text{ ip.} u}{b} - \frac{b}{2} \int \frac{du}{\cos. \text{ ip.} u}$

$$-\left(\frac{1.b^3}{2.4} \int \frac{du}{(\cos. ip.u)^3} + \frac{1.3b^5}{2.4.6} \int \frac{du}{(\cos. ip.u)^5} \right.$$

$$+ \frac{1.3.5b^7}{2.4.6.8} \int \frac{du}{(\cos. ip.u)^7} + \dots + \frac{1.3.5.7 \dots (m-2)b^m}{2.4.6 \dots (m+1)} \times$$

$$\left. \int \frac{du}{(\cos. ip.u)^m} \text{ ecc.} \right)$$
 in infinito, rappresentando m un numero qualunque posto nella serie de' dispari 3, 5, 7, 9, ecc.

13. Quanto al 1.º termine di quest' omogeneo, i teoremi de' seni e coseni iperbolici ce 'l danno $= \frac{a. \text{sen. ip.} u}{b}$. Il

2.º. lasciamol per ora coll' espressione della sommatoria; e per gl' integrali susseguenti, applichiamo la suddetta dottrina alla integrazione della formola generale $\frac{du}{(\cos. ip.u)^m}$, la qual

$$\begin{aligned}
 &\text{si trova espressa dalla seguente equazione; } \int \frac{du}{(\cos. ip.u)^m} \\
 &= \frac{(m-2)(m-4)(m-6) \dots 3.2}{(m-1)(m-3) \dots 4.2 a^{m-1}} \int \frac{du}{\cos. ip.u} \\
 &+ \frac{\text{sen. ip.} u}{(m-1) a (\cos. ip.u)^{m-2}} \\
 &+ \text{sen. ip.} u \left(\frac{m-2}{(m-1)(m-3) a^3 (\cos. ip.u)^{m-5}} \right. \\
 &+ \frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5) a^5 (\cos. ip.u)^{m-7}} \\
 &+ \frac{(m-2)(m-4)(m-6)}{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7) a^7 (\cos. ip.u)^{m-9}} \\
 &\left. + \dots + \frac{(m-2)(m-4)(m-6) \dots 3.1}{(m-1)(m-3)(m-5) \dots 4.2 a^{m-1} (\cos. ip.u)^2} \right),
 \end{aligned}$$

o ufando d' un' inversione simile all' altra dell' arco ellittico;

$$\begin{aligned}
 \int \frac{du}{(\cos. ip.u)^m} &= \frac{1.3.5 \dots (m-2)}{2.4.6 \dots (m-1) a^{m-1}} \int \frac{du}{\cos. ip.u} \\
 &+ \frac{\text{sen. ip.} u}{(m-1) a (\cos. ip.u)^{m-1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{fen. ip. } u \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (m-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m-1) a^{m-2} (\text{cof. ip. } u)^2} \right. \\
& + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (m-2)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (m-1) a^{m-4} (\text{cof. ip. } u)^4} \\
& + \frac{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (m-2)}{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots (m-1) a^{m-6} (\text{cof. ip. } u)^6} + \dots \\
& \left. + \frac{m-2}{(m-1)(m-3) a^2 (\text{cof. ip. } u)^{m-3}} \right).
\end{aligned}$$

14. Integriamo ora la formola $\int \frac{du}{\text{cof. ip. } u}$. Poichè
 $D.(\text{fen. ip. } u) = \frac{du \cdot \text{cof. ip. } u}{a}$, farà $du = \frac{a D.(\text{fen. ip. } u)}{\text{cof. ip. } u}$, e quindi

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{\text{cof. ip. } u} &= \int \frac{a D.(\text{fen. ip. } u)}{(\text{cof. ip. } u)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{a^2 D.(\text{fen. ip. } u)}{a^2 + (\text{fen. ip. } u)^2}. \text{ Ma} \\
\int \frac{a^2 D.(\text{fen. ip. } u)}{a^2 + (\text{fen. ip. } u)^2} &\text{ è eguale a un arco circolare di raggio } a, \\
&\text{tangente, fen. ip. } u. \text{ Dunque, chiamando } d \text{ quest' arco, risul-} \\
&\text{ta } \int \frac{du}{\text{cof. ip. } u} = \frac{d}{a}.
\end{aligned}$$

15. Surrogiamo finalmente in (C) questi valori, ed otterremo l' arco iperbolico $VM = (D) \frac{a \text{ fen. ip. } u}{b} - \frac{b a^2}{2a}$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (m-2)^2 b^m d}{(m+1)(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (m-1)^2 a^m)} - \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (m-1) b^m \cdot \text{fen. ip. } u)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m+1)} \\
& \left(\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (m-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (m-1) a^{m-2} (\text{cof. ip. } u)^2} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (m-2)}{4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (m-1) a^{m-4} (\text{cof. ip. } u)^4} \right. \\
& + \frac{7 \cdot 9 \dots (m-2)}{6 \cdot 8 \cdot 10 \dots (m-1) a^{m-6} (\text{cof. ip. } u)^6} + \dots \\
& \left. + \frac{m-2}{(m-1)(m-3) a^2 (\text{cof. ip. } u)^{m-3}} \text{ ecc.} \right) \text{ in infinito.}
\end{aligned}$$

16. Qui pure avvertiremo, come abbiain fatto al num.^o 8 per l' arco ellittico; 1.^o, che in questa integrazione non

va aggiunta alcuna costante, perchè, essendo nullo VM , svanisce sen. ip. u , e in conseguenza l' arco d , onde tutto va a zero; 2.°, che i termini dell' omogeneo, cominciando dal terzo, esprimono i termini generali delle serie corrispondenti, dovendosi, per avere il valore di VM , assegnar successivamente alla specie m tutti i valori de' numeri dispari 3, 5, 7 ecc. senza limite; 3.°, che per essere sempre $b < a$, e molto più $<$ cos. ip. u , le serie indi nascenti, ordinate secondo le potestà de' coseni, avranno maggior convergenza, quanto maggiore è la potestà del coseno; finalmente, che attribuiti valori numerici ai simboli a, b, u , si verrà a determinare in numeri il valor prossimo di qualunque arco iperbolico VM della data iperbola.

17. Stabiliscasi ora l' arco VM infinito. A tale ipotesi corrispondono il seno, e il coseno iperbolici infiniti ed eguali. Dunque svaniranno affatto le serie del 4.° termine nell' omogeneo (D) del numero 15; l' arco circolare d , che ha la tangente infinita, diventerà il quadrante della periferia; e fatto ϕ eguale alla semicirconferenza di raggio 1, farà l' arco infinito $VM' = \frac{a. \text{sen. ip. } u}{b} - \frac{b\phi}{4}$

$$- \frac{b\phi}{2} \left(\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (m-2)^2 b^{m-1}}{(m+1)(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (m-1)^2 a^{m-1}} \right), \text{ cioè;}$$

$$\frac{a. \text{sen. ip. } u}{b} - VM' = \frac{b\phi}{4}$$

$$+ (E) \frac{b\phi}{2} \left(\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \dots (m-2)^2 b^{m-1}}{(m+1)(2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots (m-1)^2 a^{m-1}} \right).$$

18. Fatto $m=3$, risulta il termine $(E) = \frac{b\phi}{2} \left(\frac{1^2 b^2}{4 \cdot 2^2 a^2} \right).$

All' ipotesi di $m=5$ compete $(E) = \frac{b\phi}{2} \left(\frac{1^2 \cdot 3^2 b^4}{6 \cdot 2^2 \cdot 4^2 a^4} \right).$ La sus-

seguente di $m=7$ dà $(E) = \frac{b\phi}{2} \left(\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 b^6}{8 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 a^6} \right)$ ecc., giacchè

la legge è evidente. Di più pel num.° VII. ove infinito sia l' arco dell' iperbola, diventa $\frac{a. \text{sen. ip. } u}{b}$, l' intero assintoto

CM' ; e quindi $\frac{a \cdot \text{sen. ip. } u}{b} - VM'$, è eguale alla differenza

tra l' asintoto e l' arco iperbolico infinito. Espressa perciò questa differenza col simbolo Δ , farà $\Delta = (F) \frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2} \left(\frac{1^2 \cdot b^2}{2^2 + a^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot b^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6a^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 b^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8a^6} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 b^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10a^8} \text{ ecc.} \right)$

$$= \frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2} \left(\frac{1^2 b^2}{4 + a^2} + \frac{3^2 b^2 \cdot A'}{4 \cdot 6 a^2} + \frac{5^2 b^2 \cdot B'}{6 \cdot 8 a^2} + \frac{7^2 b^2 \cdot C'}{8 \cdot 10 a^2} \text{ ecc.} \right),$$

intendendo che A' , B' , C' ecc. significhino i termini precedenti. Dall' esser $b < a$ in qualunque iperbola, la convergenza della presente serie si rende manifestissima; onde al caso che b , ed a abbian valori numerici, avrem pronto il valor prossimo di Δ colla addizione di non molti suoi termini.

19. Dopo le anzidette teorie mettiamci sotto all' occhio la forma che hanno i multipli de' differenziali degli archi ellittici ed iperbolici, i quali si riferiscono ad un' ascissa centrale situata nel 1.° o nel 2.° asse. Chiamato pertanto f il 1.° semiasse della sezione conica, g il 2.°, e cz l' ascissa centrale, e $\frac{1}{Vb}$ il multiplo dell' arco, avremo, siccome è noto

$$1.^{\circ} \quad \frac{1}{Vb} \cdot \text{diff. dell' arco ellittico coll' ascissa } cz \text{ nel } 1.^{\circ} \text{ asse}$$

$$= \frac{dz \sqrt{(f^2 - (f^2 - g^2)cz^2 : f^2)}}{V(f^2b : c^2 - bz^2)}$$

$$2.^{\circ} \quad \frac{1}{Vb} \cdot \text{diff. dell' arco ellittico coll' ascissa } cz \text{ nel } 2.^{\circ} \text{ asse}$$

$$= \frac{dz \sqrt{(g^2 + (f^2 - g^2)cz^2 : g^2)}}{V(g^2b : c^2 - bz^2)}$$

$$3.^{\circ} \quad \frac{2}{Vb} \cdot \text{diff. dell' arco iperbolico coll' ascissa } cz \text{ nel } 1.^{\circ} \text{ asse}$$

$$= \frac{dz \sqrt{(-f^2 + (f^2 + g^2)cz^2 : f^2)}}{V(-f^2b : c^2 + bz^2)}$$

$$4.^{\circ} \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \text{diff. dell' arco iperbolico coll' ascissa } cz \text{ nel } 2.^{\circ} \text{ affe} \\ = \frac{dz \sqrt{(g^2 + (f^2 + g^2)cz^2 : g^2)}}{\sqrt{(g^2b : c^2 + bz^2)}}. \text{ Quindi concludere-}$$

mo, che tutte le formole differenziali, le quali sono integrabili cogli archi ellittici, ed iperbolici, si potranno con opportune sostituzioni trasfigurare nella forma generica

$$\frac{dx \sqrt{(A + Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}}, \text{ in cui } A, B, C, D \text{ possono essere quanti-}$$

tà positive o negative. Supporrò dunque, che sotto qualunque diverso aspetto si sian presentate al Geometra formole, che per l' integrazione ammettano i suddetti archi, egli le abbia cogli artifizj dell' analisi ridotte alla suddetta forma generale, la quale nel decorso di questo scritto farà l' oggetto unico delle nostre considerazioni.

$$20. \text{ Arrivati che faremo alla formola } \frac{dx \sqrt{(A + Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}},$$

non potrem tosto concludere, che il suo integrale sia o un arco semplice di sezion conica, o un multiplo di quest' arco; perchè ciò dipende non solo dai segni che si voglion prefissi alle quantità costanti A, B, C, D , ma eziandio dal valor maggiore o minore di queste medesime quantità. In alcuni casi la formola differenziale potrebb' essere immagina-

$$\text{ria, come se fosse } \frac{dx \sqrt{(-A - Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}}, \text{ e per conseguenza}$$

impossibile la sua integrazione in termini reali. In alcuni altri essa debb' essere nuovamente trasformata, affinchè il confronto colle 4 formole del numero 19 non induca alcun assurdo. Una piccola riflessione farà conoscere il caso della impossibilità; ed ove, essendo reale, senza incongruenze ricusi di farsi identica con una delle quattro suddette, tre Lemmi basteranno a cangiarla in più formole per modo, che di alcune algebricamente, e dell' altre colla notata identicità se ne possa assegnare l' integrazione.

$$21. \text{ Ecco il } 1.^{\circ} \text{ Lemma; } \frac{dx \sqrt{(A + Bx^2)}}{\sqrt{(C + Dx^2)}}$$

$$= \frac{(BC-AD)x^2 dx}{C\sqrt{(A+Bx^2)}\sqrt{(C+Dx^2)}} + \frac{Adx\sqrt{(C+Dx^2)}}{C\sqrt{(A+Bx^2)}}.$$
 La riduzione dell' omogeneo renderà evidente la verità di questo Lemma. Si faccia ora $\sqrt{(A+Bx^2)}=z$. Da questa sostituzione trarremo $\frac{dx\sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}} = \frac{(BC-AD)}{BC} \cdot \frac{dz\sqrt{(-A+z^2)}}{\sqrt{(BC-AD+Dz^2)}} + \frac{Adx\sqrt{(C+Dx^2)}}{C\sqrt{(A+Bx^2)}}.$ Diremo poi: o ciascuna delle due formole di quest' ultimo membro soffre senza assurdo il confronto coi multipli de' differenziali degli archi, o no. Nel 1.º caso la proposta formola è già integrata; nel 2.º v' è bisogno di una nuova trasformazione.

22. Sia in genere $\frac{dt\sqrt{(E+ Ft^2)}}{\sqrt{(G+ Ht^2)}}$ la formola nuovamente trasformabile. Pongasi $u = \frac{\sqrt{(E+ Ft^2)}}{\sqrt{(G+ Ht^2)}}$, onde proviene $t = \frac{\sqrt{(E- Gu^2)}}{\sqrt{(-F+ Hu^2)}}$; e farà $\int \frac{dt\sqrt{(E+ Ft^2)}}{\sqrt{(G+ Ht^2)}} = \int u dt = ut - \int t du = \frac{t\sqrt{(E+ Ft^2)}}{\sqrt{(G+ Ht^2)}} - \int \frac{du\sqrt{(E- Gu^2)}}{\sqrt{(-F+ Hu^2)}}$; e questo è il 2.º Lemma.

23. Se questa trasformazione praticata nella formola $\frac{dt\sqrt{(E+ Ft^2)}}{\sqrt{(G+ Ht^2)}}$ non valesse a rendere il termine $\int \frac{du\sqrt{(E- Gu^2)}}{\sqrt{(-F+ Hu^2)}}$ identico con un multiplo d' arco di sezione conica, si faccia quest' altra sostituzione; $u' = \frac{\sqrt{(G+ Ht^2)}}{\sqrt{(E+ Ft^2)}}$, che dà $t = \frac{\sqrt{(-G+ Eu'^2)}}{\sqrt{(H- Fu'^2)}}$. Alzata al quadrato l' una o l' altra di queste frazioni, si ha $Eu'^2 + Ft'^2 u'^2 = G + Ht'^2$; e differenziando; $Eu'du' + Ft'u'.D.(tu') = Htdt$, cioè $\frac{dt}{u} = \frac{F.D.(tu')}{H} + \frac{Edu'}{Ht}$; e quindi $\int \frac{dt\sqrt{(E+ Ft^2)}}{\sqrt{(G+ Ht^2)}}$

$$= \frac{Ft \sqrt{(G+Ht^2)}}{H \sqrt{(E+ Ft^2)}} + \frac{E}{H} \int \frac{du' \sqrt{(H-Fu'^2)}}{\sqrt{(-G+Eu'^2)}}$$
, equazione, in cui consiste il 3.º Lemma. O coll' una o coll' altra trasformazione, che fanno nascere questi due ultimi Lemmi tratti dal citato Opuscolo Riccaziano, otterrem sempre la bramata integrazione.

24. Da ciò si raccoglie, che la formola $\frac{dx \sqrt{(A+Bx^2)}}{\sqrt{(C+Dx^2)}}$ al più resta integrata con due archi di fezion conica, prescindendo dalla quantità algebrica, che pur vi ha luogo. Il metodo usato dal P. *Riccati* porta alcune volte le integrazioni a tre archi coll' unione di più termini algebratici; laddove il mio si raccomanda per la sua maggiore semplicità, avendosi con esso al più 3 soli termini integrali, come vedremo ne' seguenti numeri, cioè una quantità algebrica, un multiplo d' arco ellittico, e un multiplo d' arco iperbolico. Ma venghiamo ad esaminare partitamente tutte le combinazioni, che può ricever la formola generale $\frac{dx \sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$ e per rapporto ai segni, e per rapporto ai valori delle costanti, che moltiplicano i termini vincolati dai radicali; onde nelle integrazioni o apparisca colla quantità algebrica il solo arco iperbolico, o l' arco ellittico e l' arco iperbolico insieme. Di quelle modificazioni di formole, le cui integrazioni dipendono dalla quantità algebrica e dall' arco ellittico unicamente, non faremo menzione, perchè queste, qualunque valor reale s' attribuisca alla variabile, non avranno mai differenze finite di termini infiniti.

25. Venga innauzi a tutte la formola 1.ª $\frac{dx \sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$, nella quale m, n, p, q sian tutte positive. Due ipotesi si posson fare; 1.ª, che sia $np > mq$, 2.ª, che sia $mq > np$. Pel caso della 1.ª ipotesi, confrontata la formola colla 4.ª del num.º 19, si vedrà a un tratto, che il suo integrale è

$$= \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\text{arco iperbolico di } 1.^\circ \text{ semiasse; } \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{q}}; \text{ascissa} \right.$$

2.º semiasse; $\sqrt{\frac{m}{q}}$
D d d d d ij

centrale nel 2.^o asse; $\frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$), e non è soggetto ad alcuna difficoltà. La 2.^a ipotesi di $mq > np$ vuole per l'integrazione della formola il foccorfo de' due primi Lemmi notati ai numeri 21, 22, e si avrà $\int \frac{dx \sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$

$$= -\frac{(mq-np)}{np} \cdot \frac{x\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}} + \frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}} \left(\text{arco ellittico di 1.^o fem. } \sqrt{m}; \text{ascissa cent. nel 1.^o asse; } \frac{x\sqrt{mq}}{\sqrt{(p+qx^2)}} \right)$$

 2.^o fem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$$+ \frac{m}{p\sqrt{n}} \left(\text{arco iperbolico di 1.^o fem. } \frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}; \text{ascissa 2.^o fem. } \sqrt{p} \right)$$

 cent. nel 2.^o asse; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}} \Big) + C.$

26. Si accetti l'ipotesi, che fatto $x=0$ sia l'integrale $=0$. Perchè con tale supposizione svaniscono tutti i termini dell'omogeneo, non va aggiunta alcuna costante, e riman $C=0$. Se si fa $x=\infty$, l'arco ellittico ha \sqrt{m} per ascissa nel 1.^o asse, cioè l'ascissa e il primo semiasse sono eguali; e quindi l'arco diventa il quadrante \mathcal{Q} dell'ellissi. Il termine algebrico si cangia in quest'altra formola;

$$-\frac{(mq-np) \cdot x}{p\sqrt{nq}},$$
 che è una quantità infinita negativa. E

perchè l'arco ip. ha l'ascissa nel 2.^o asse $=\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$, cioè infinita, farà pure esso arco un infinito ma positivo.

27. Per avere la differenza di questi due infiniti, riesce opportuno l'esprimere il termine algebrico $-\frac{(mq-np)x}{p\sqrt{nq}}$

in quest'altra maniera equivalente; $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} - \frac{mx\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}$, onde,

quando x è infinita, risulti $\int \frac{dx \sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}} = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$

$$+ \frac{(mq - np)}{np\sqrt{q}} \cdot 2 - \frac{m}{p\sqrt{n}} \left(x\sqrt{q} - \text{arco ip. di } 1^\circ \text{ fem. } \frac{\sqrt{(mq - np)}}{\sqrt{n}}; \right. \\ \left. 2^\circ \text{ fem. } \sqrt{p} \right);$$

ascissa cent. nel 2° asse; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}} \Big)$. Consultiamo ora il num^o.

VIII, che in qualunque iperbola riferita al 2° . asse ci dà il valor dell' asintoto infinito $= \frac{CV^2 \cdot CG'}{CA \cdot CK}$. Poichè per le teorie

coniche $\frac{CV^2}{CA}$ è eguale alla radice della somma de' quadrati de'

due semiasse, farà nel caso nostro $\frac{CV^2}{CA} = \frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}}$, e $\frac{CG'}{CK}$

$= \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$. Quindi il nostro asintoto $= x\sqrt{q}$, e $x\sqrt{q} - \text{arco}$

ip. suddetto eguale alla differenza Δ tra l' asintoto e l' arco ip. infinito. Perilchè, quando sia $mq > np$ e l' ascissa centrale infinita, si trova

$$\int \frac{dx \sqrt{(m + nx^2)}}{\sqrt{(p + qx^2)}} = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} \\ + \frac{(mq - np)}{np\sqrt{q}} \cdot 2 - \frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}. \text{ E siccome questi due ultimi termi-}$$

ni sono quantità finite, rimanendo il primo $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ un infini-

to, nella accettata supposizione; $\int \frac{dx \sqrt{(m + nx^2)}}{\sqrt{(p + qx^2)}}$ diventa

$= \infty$. Ed ecco, come la incertezza, che potea nascere sulla finità, o infinità della differenza tra i due termini infiniti, resti colla scorta delle nostre teorie totalmente dileguata.

28. 2^a. formola da integrarsi; $\frac{dx \sqrt{(m + nx^2)}}{\sqrt{(-p + qx^2)}}$. Qui si ve-

de subito, essere il minor valore della $x = \pm \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, potendo

poi crescere sì positivamente che negativamente all' infinito. Nella formola presente, siccome in tutte l' altre avvenire per maggior comodo considereremo le sole x positive, e intanto

diremo, che è il minor valore della $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, e il massimo eguale all' infinito positivo. Poscia col maneggio de' due primi Lemmi, troverem presto; $\int \frac{dx \sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \left(\frac{mq+np}{np\sqrt{q}} \right)$

(arco iperbolico di 1.° sem. \sqrt{m} ; ascissa cent. nel 1.° asse;

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$\frac{\sqrt{mq} \sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(mq+np)}} \Big) - \frac{mx \sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m+nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}} \left(\text{arco ellit-} \right.$
tico di 1.° sem. $\frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa cent. nel 2.°; $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} \times$

2.° sem. \sqrt{p}
 $\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m+nx^2)}} \Big) .$

29. Nell' ipotesi che la formola integrata svanisca, quando $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, l' ascissa cent. dell' arco iperbolico riesce eguale al 1.° semiasse \sqrt{m} ; e però l' arco è nullo, siccome nulle risultano le quantità susseguenti, onde per l' integrale completo non si ricerca costante di alcuna sorta. Ma se si pone $x = \infty$, l' arco iperbolico proviene infinito di valore, perchè ha infinita l' ascissa centrale $\frac{x\sqrt{(mnq)}}{\sqrt{(mq+np)}}$; ed infinita eziandio è la quantità algebrica che gli tien dietro, la quale si cangia in $-\frac{mx\sqrt{q}}{p\sqrt{n}}$. Finalmente riuscendo l' ascissa dell'

arco ellittico eguale al 2.° semiasse \sqrt{p} , l' arco diventa il quadrante Q dell' ellisse. Quanto ai due termini infiniti, che hanno i segni contrarj, convien vedere, se la loro differenza sia finita o infinita: e a questo fine scriveremo la quantità algebrica e il multiplo dell' arco iperbolico equivalentemente così; $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} - \left(\frac{mq+np}{np\sqrt{q}} \right) \left(x\sqrt{n} - \text{arco iperbolico di} \right.$

1.° sem. \sqrt{m} ; ascissa cent. nel 1.°; $\frac{x\sqrt{(mq)}}{\sqrt{(mq+np)}} \Big)$. Appressio

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

dal num.° VII trarremo l' asintoto $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP}{CV}$

$$= \frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{q}} \cdot \frac{x\sqrt{nq}}{\sqrt{(mq+np)}} = x\sqrt{n}; \text{ dal che si rileva,}$$

essere i termini tra la parentesi la differenza Δ tra l' asintoto e l' arco infinito. Per conseguenza, fatto $x = \infty$, habbi

$$\int \frac{dx\sqrt{(m+nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}} - \frac{(mq+np)}{np\sqrt{q}} \cdot \Delta + \frac{m\mathcal{Q}}{p\sqrt{n}}; \text{ e siccome}$$

Δ , \mathcal{Q} sono quantità finite e $\frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{q}}$ un infinito, farà infinito di valore il nostro integrale.

30. 3.ª formola, $\frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p+qx^2)}}$. In questa formola è chia-

ro, che i limiti de' valori di x sono $x = 0$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, di-

venendo essa immaginaria ne' valori maggiori. Fatto uso del

$$1.° \text{ e del } 3.° \text{ Lemma, si avrà pronto il suo integrale}$$

$$= \frac{(mq+np)\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(p+qx^2)}}{npqx} - \frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq} \Big(\text{arco}$$

iperbolico di 1.° sem. \sqrt{q} ; ascissa cent. nel 1.°; $\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{(mq+np)}} \Big)$

2.° sem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$

+ $\frac{m}{p\sqrt{n}} \Big(\text{arco ellittico di 1.° sem. } \frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}}; \text{ ascissa cent.}$

2.° sem. \sqrt{p}

nel 2.°; $\frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}} \Big) + C.$

31. Abbracciando l' ipotesi, che tutto vada a zero, quando $x = 0$, resterà determinata la costante C . In tal caso sva-

nisce l' arco ellittico , perchè è nulla l' ascissa centrale ; ma i due primi termini, che si mutano in questi altri;

$$\frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq} \left(\frac{\sqrt{p}}{x} - \text{arco iperbolico di } 1.^{\circ} \text{ sem. } \sqrt{q}, \text{ ascif-} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2.^{\circ} \text{ sem. } \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}} \end{array} \right)$$

sa cent. nel $1.^{\circ}$, $\frac{\sqrt{(mpq)}}{x\sqrt{(mq+np)}}$) sono la differenza di due quantità infinite. Poichè l'ascissa si assume nel $1.^{\circ}$ asse, risulta l'asintoto iperbolico $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP'}{CV} = \frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{mp}}{x\sqrt{(mq+np)}}$

$= \frac{\sqrt{p}}{x}$; sicchè i due termini vincolati dalla parentesi dinotano la solita differenza finita Δ . Nella ipotesi di $x=0$, farà quindi $0 = \frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq} + C$, o sia

$$C = - \frac{(mq+np)\Delta\sqrt{m}}{npq} ; \text{ e il completo integrale della formo-}$$

$$\text{la} = \frac{(mq+np)\sqrt{m}}{npq} \left(\frac{\sqrt{(m-nx^2)}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{m}} - \Delta - \text{arco}$$

iperbolico di $1.^{\circ}$ sem. \sqrt{q} ; ascissa nel $1.^{\circ}$ $\frac{\sqrt{mq}\sqrt{(p+qx^2)}}{x\sqrt{(mq+np)}}$)

$$2.^{\circ} \text{ sem. } \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{m}}$$

$$+ \frac{m}{p\sqrt{n}} \left(\text{arco ellittico di } 1.^{\circ} \text{ sem. } \frac{\sqrt{(mq+np)}}{\sqrt{n}} ; \text{ ascissa nel } 2.^{\circ} \right.$$

$$\left. \frac{x\sqrt{np}}{\sqrt{m}} \right) . \text{ Ove poi saper vogliasi , quale integrale competa}$$

al valor massimo di x , cioè a $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, fatta la sostituzione, si troverà, che l' arco iperbolico, e la quantità algebrica svaniscono , e che l' arco ellittico diventa il quadrante

dell'

dell' ellissi. Onde essendo $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, si ha $\int \frac{dx \sqrt{(m - nx^2)}}{\sqrt{(p + qx^2)}}$
 $= - \frac{(mq + np) \Delta \sqrt{m}}{npq} + \frac{m \Delta}{p \sqrt{n}}$; il che fa conoscere, non poter mai l' integrale della formola aver valore infinito.

32. 4^a. formola; $\frac{dx \sqrt{(m - nx^2)}}{\sqrt{(p - qx^2)}}$. Distinguiamo in questa due ipotesi; la 1^a. che sia $mq > np$; la 2^a. che sia $np > mq$. Nella prima l' integrazione accetta solo l' arco ellittico e non è di quelle che noi consideriamo. Laonde si assuma l' altra di $np > mq$ che porta all' arco iperbolico, e riflettiamo a 3 casi. Il 1^o. che il valore di x sia posto tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \infty$; il 2^o. che stia tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; il 3^o. che stia tra i limiti $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $x = 0$. Non c' è difficoltà alcuna pel 1^o. caso, avvegnachè l' integrale della formola è $\frac{1}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1^o. sem. \sqrt{m} ; ascissa cent. nel 1^o. asse;

$$2^{\circ} \text{ sem. } \frac{\sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{q}}$$

$\frac{x \sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$), supponendo che l' integrale sia zero, quando $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$. Cresciuta poi x fino all' infinito, poichè l' ascissa $\frac{x \sqrt{mq}}{\sqrt{p}}$ è infinita, tosto si scorge, che l' arco, e in conseguenza l' integral della formola è un infinito.

33. Se x è collocata tra i limiti $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, che è il caso 2^o, si fa chiara l' immaginarietà della formola, onde altro non ci resta che il 3^o. caso del valore di x posto tra

i limiti $x=0$; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, pel quale l'uso del 3°. Lemma

con breve calcolo ci presenta; $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{nx\sqrt{(p-qx^2)}}{q\sqrt{(m-nx^2)}} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{q}}$ (arco ip. di 1°. fem. \sqrt{q} , ascissa nel 1°; $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{p}} \times$
2°. fem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{m}}$

$\frac{\sqrt{(p-qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}})$. Tralascio la costante, perchè suppongo, che

fatto $x=0$, tutto svanisca; il che avviene sì nella parte algebrica, come anche nell'arco iperbolico, la cui ascissa cen-

trale si fa eguale al 1°. semiasse. Pongo ora $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; e i

due termini dell'integrazione diventano due quantità infinitesime che si possono esprimer così;

$\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{q}} \left(\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}} - \text{arco} \right.$
iperbolico di 1°. fem. \sqrt{q} ; ascissa nel 1°. $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{np}} \times \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}})$.
2°. fem. $\frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{m}}$

Ma pel num.° VII. essendo l'asintoto $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CP}{CV}$, nel caso

nostro diventa $= \frac{\sqrt{(np-mq)}}{\sqrt{(m-nx^2)}}$. Dunque i termini nella pa-

rentesi sono la consueta differenza Δ ; e conseguentemente se

sia $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, farà $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}} = \frac{\Delta\sqrt{m}}{q}$.

34. 5°. formola; $\frac{dx\sqrt{(-m+nx^2)}}{\sqrt{(p-qx^2)}}$. Qui pure han luogo

due ipotesi; 1°. $np > mq$; 2°. $mq > np$. Nella 1°. supposizio-

ne, i limiti de' valori della x sono; $x=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$; $x=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, de'

quali il primo è minore, l'altro maggiore; e coll'unico 2°.

Lemma agevolmente si ottiene; $\int \frac{dx \sqrt{(-m + nx^2)}}{\sqrt{(p - qx^2)}}$
 $= \frac{x\sqrt{(-m + nx^2)}}{\sqrt{(p - qx^2)}} - \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\text{arco ip. di } 1^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{m}} \right);$
 ascissa nel 2° ; $\frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{(-m + nx^2)}}{\sqrt{(p - qx^2)}}$). Ometto di aggiun-
 ger costante, perchè stabilisco, che la formola integrata s' an-
 nulli, quando $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$. Dasi ora a x il maggior valore,
 cioè si faccia $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$; e i due termini della integrazione di-
 ventano due infiniti, che si possono mettere sotto questa for-
 ma; $\frac{1}{\sqrt{q}} \left(\frac{\sqrt{p} \sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{q} \sqrt{(p - qx^2)}} - \text{arco iperbolico di} \right.$
 $1^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{q}}; \text{ ascissa nel } 2^{\circ}; \frac{\sqrt{m} \sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{n} \sqrt{(p - qx^2)}} \left. \right)$. In
 $2^{\circ} \text{ fem. } \sqrt{m}$
 questa iperbola la somma de' quadrati de' semiasse è $\frac{np}{q}$. Dun-
 que $\frac{CV^2}{CA} = \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$; $\frac{CG'}{CK} = \frac{\sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{n} \sqrt{(p - qx^2)}}$; e l' assintoto
 $= \frac{CV^2}{CA} \cdot \frac{CG'}{CK} \text{ (num. VIII)} = \frac{\sqrt{p} \sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{q} \sqrt{(p - qx^2)}}$. Quindi, essen-
 do $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, avremo $\int \frac{dx \sqrt{(-m + nx^2)}}{\sqrt{(p - qx^2)}} = \frac{\Delta}{\sqrt{q}}$, appartenen-
 do Δ all' iperbola di $1^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{(np - mq)}}{\sqrt{q}}$; $2^{\circ} \text{ fem. } \sqrt{m}$.

35. La 2^a . ipotesi fissa $mq > np$. Poichè questo è l' ulti-
 mo caso tra quelli, in cui le formole esigono per la loro
 integrazione gli archi iperbolici, noi il tratterem per disfe-
 so, affinchè indi trar si possa norma pel maneggio degli al-
 tri, che abbiamo ne' superiori numeri considerati. I limiti

1.° fem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{u\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$, come fa cono-

2.° fem. \sqrt{p}

fcere il paragone colla 4 formola del num°. 19. Dunque in vece di u sostituito il suo valore per x , farà

$$\int -\frac{mdx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} = -\frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}} \left(\text{arco}$$

iperbolico di 1.° fem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} \times$

2.° fem. \sqrt{p}

$$\frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}} \Big); \text{ e finalmente } \int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}}$$

$$= -\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}} \left(\text{arco ellittico di 1.° fem. } \sqrt{m}; \text{ ascissa nel}$$

2.° fem. $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$

$$1.°; \frac{\sqrt{mq}\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}} \Big) - \frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}} \left(\text{arco iper-}$$

bolico di 1.° fem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} \times$

$$2.° \text{ fem. } \sqrt{p} \frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}} \Big) + C.$$

36. L' ipotesi che l' integrale svanisca, quando vuoi si $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, valor minimo della variabile, serve a determinare

la costante C . In tale supposizione l' ascissa centrale dell' arco ellittico diventa $= \sqrt{m}$, che è il 1.° semiasse, ove si prendon le ascisse. Facendosi pertanto l' arco eguale al quadrante ellittico \mathcal{Q} , ed annullandosi evidentemente gli altri due termini, avrem l' equazione $0 = -\frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}} \mathcal{Q} + C$; e quindi

$$\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \left(\frac{mq-np}{np\sqrt{q}} \right) \left(\mathcal{Q} - \text{arco ellittico di}$$

Eeeee ij

$$1.^{\circ} \text{ fem. } \sqrt{m}; \text{ ascissa nel } 1.^{\circ}, \frac{\sqrt{mq} \cdot \sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(mq-np)}}$$

$$2.^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} - \frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}} \left(\text{arco iperbolico di } 1.^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}; \text{ ascissa nel } 2.^{\circ}, \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} \times \frac{\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{(m-nx^2)}} \right) - 2.^{\circ} \text{ fem. } \sqrt{p}$$

37. Renderemo anche più semplice questo integrale, se rifletteremo, che la differenza tra il quadrante dell'ellissi e il notato arco è eguale all'arco ellittico de' predetti semiasfi, coll'ascissa centrale nel 2.^o asse $= \frac{n\sqrt{p}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(mq-np)}}$. Sicchè, quando $mq > np$; $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \left(\frac{mq-np}{np\sqrt{q}} \right) \left(\text{arco ellittico di } 1.^{\circ} \text{ fem. } \sqrt{m}; \text{ ascissa nel } 2.^{\circ}, \frac{n\sqrt{p}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(mq-np)}} \right)$

$$2.^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}} - \frac{mx\sqrt{(-p+qx^2)}}{p\sqrt{(m-nx^2)}} + \frac{m}{p\sqrt{n}} \left(\text{arco iperbolico di } 1.^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}; \text{ ascissa nel } 2.^{\circ} \frac{\sqrt{np}\sqrt{(-p+qx^2)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}} \right) - 2.^{\circ} \text{ fem. } \sqrt{p}$$

38. Dal minimo valore di $x = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$, che ci ha servito a determinare la costante C, si passi al massimo $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, e si cerchi quale integrale gli corrisponda. A buon conto, per l'arco ellittico, riuscendo l'ascissa nel 2.^o asse eguale a $\frac{\sqrt{np}}{\sqrt{q}}$, che è appunto il 2.^o semiasse, il suddetto arco si muta nel quadrante \mathcal{Q} ; i due termini poi che seguono sono di valore infinito; ma adoperando l'usitata espressione, colla introduzione del valore dato di x li potremo scriver così;

— $\frac{m}{p\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{m}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}\sqrt{(m-nx^2)}} - \text{arco iperbolico di} \right.$

1.° fem. $\frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}}$; ascissa nel 2.° $\frac{\sqrt{p}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}} \left. \right\}$. Ora

2.° fem. \sqrt{p}

poichè, coll'adattamento de' valori del num.° VIII. alla presente iperbola, diventa $\frac{CV^2}{CA} = \frac{\sqrt{mq}}{\sqrt{n}}$, e $\frac{CG'}{CK} = \frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{q}\sqrt{(m-nx^2)}}$,

onde si trae l'intero assintoto $= \frac{\sqrt{m}\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{n}\sqrt{(m-nx^2)}}$, cioè =

al termine algebrico, che dentro la parentesi precede l'arco iperbolico infinito; resta chiarissima la conclusione, che gli anzidetti due termini equivalgono a $\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$, e che, ove sup-

pongasi $x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ si fa (G) $\int \frac{dx\sqrt{(m-nx^2)}}{\sqrt{(-p+qx^2)}} = \frac{(mq-np)}{np\sqrt{q}} \mathcal{Q}$

— $\frac{m\Delta}{p\sqrt{n}}$.

39. Ritornando ora alle serie (B), (F) de' num. 9, 18, le quali esibiscono il valore del quadrante \mathcal{Q} dell'ellissi, e la differenza Δ tra l'assintoto e l'arco infinito dell'iperbola,

e sono $\mathcal{Q} = \frac{a\phi}{2} - \frac{a\phi}{2} \left(\frac{1.a^2}{2^2.b^2} + \frac{1^2.3a^4}{2^2.4^2b^4} + \frac{1^2.3^25a^6}{2^3.4^2.6^2b^6} \text{ ecc.} \right)$;

$\Delta = \frac{b\phi}{4} + \frac{b\phi}{2} \left(\frac{1^2.b^2}{2^2.4a^2} + \frac{1^2.3^2b^4}{2^2.4^2.6a^4} + \frac{1^2.3^2.5^2b^6}{2^3.4^2.6^2.8a^6} \text{ ecc.} \right)$, farem

la riflessione, che, nell'una e nell'altra serie, a rappresenta il 1.° fem. della curva; b la distanza del centro dalla direttrice, la qual distanza nella ellisse è 3.^a proporzionale dopo la radice della differenza de' quadrati de' due semiasse e il semiasse 1.°; nella iperbola è 3.^a proporzionale dopo la radice della somma, e lo stesso 1.° semiasse. Pel nostro quadrante

\mathcal{Q} , farà dunque $a = \sqrt{m}$; $b = \frac{m\sqrt{q}}{\sqrt{(mq-np)}}$, e

$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{(mq-np)}}{\sqrt{mq}}$; e però $\mathcal{Q} = \frac{\phi\sqrt{m}}{2} - \frac{\phi\sqrt{m}}{2} \left(\frac{1.(mq-np)}{2^2mq} \right)$.

+ $\frac{1^2 \cdot 3 (mq - np)^2}{2^2 \cdot 4^2 m^2 q^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 (mq - np)^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 m^3 q^3}$ ecc.) per la differenza Δ avrem poi $a = \frac{\sqrt{(mq - np)}}{\sqrt{n}}$; $b = \frac{mq - np}{\sqrt{(mq)}}$, e

$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{(mq - np)}}{\sqrt{mq}}$, che è lo stesso valore di $\frac{a}{b}$ nel quadrante

ellittico. Quindi $\Delta = \frac{\phi(mq - np)}{4\sqrt{(mq)}} + \frac{\phi(mq - np)}{2\sqrt{(mq)}} \left(\frac{1^2 (mq - np)}{2^2 \cdot 4mq} + \frac{1^2 \cdot 3^2 (mq - np)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6m^2 q^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 (mq - np)^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8m^3 q^3} \right.$ ecc.). E colla so-

stituzione di queste due serie nell'equazione (G), quando

$x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$, farà $\int \frac{dx \sqrt{(m - nx^2)}}{\sqrt{(-p + qx^2)}} = \frac{\phi \sqrt{m(mq - np)}}{2np \sqrt{q}} - \frac{\phi \sqrt{m(mq - np)}}{4np \sqrt{q}} \left(\frac{1 \cdot (mq - np)}{2^2 mq} + \frac{1^2 \cdot 3 (mq - np)^2}{2^2 \cdot 4^2 m^2 q^2} \right.$ ecc.)

$- \frac{\phi \sqrt{m(mq - np)}}{4np \sqrt{q}} - \frac{\phi \sqrt{m(mq - np)}}{2np \sqrt{q}} \left(\frac{1^2 (mq - np)}{2^2 \cdot 4mp} + \frac{1^2 \cdot 3^2 (mq - np)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6m^2 q^2} \right.$ ecc.) , ovvero $-\int \frac{dx \sqrt{(m - nx^2)}}{\sqrt{(-p + qx^2)}}$

$= \frac{\phi \sqrt{m(mq - np)}}{4np \sqrt{q}} - \frac{\phi \sqrt{m(mq - np)}}{2np \sqrt{q}} \left(\frac{1 (mq - np)}{2^2 mq} + \frac{1^2 (mq - np)}{2^2 \cdot 4mq} + \frac{1^2 \cdot 3 (mq - np)^2}{2^2 \cdot 4^2 m^2 q^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 (mq - np)^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6m^3 q^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 (mq - np)^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8m^3 q^3} + \right.$ ecc.). La leg-

ge di questa elegante serie è chiarissima, siccome è chiara ancora la sua convergenza, atteso che i fattori numerici de' denominatori sono in ciascun termine maggiori de' fattori numerici ne' numeratori; in oltre $\frac{mq - np}{mq}$, e molto più le cre-

scenti potestà intere di questa frazione son sempre minori dell'unità.

40. Un bell' esempio della necessità di conoscere il valore della differenza tra l' asintoto e l' arco iperbolico infinito ci viene somministrato da un de' problemi, che scioglie il celebre

celebre P. *Fontana* nel I. Tomo delle Memorie della *Società Italiana* alla pag. 123 e seguenti. Questo problema riguarda la misura della luce, che riceve un punto collocato dentro l'aja d'un cerchio, la cui circonferenza sia raggiante; e viene sciolto dal suddetto Autore prima nell' ipotesi ordinaria, che la quantità del lume ricevuto debba unicamente ripetersi dalla quantità illuminatrice moltiplicata nel quadrato inverso della distanza del punto illuminato dal punto, da cui si scaglia il raggio illuminatore: poi nell'altra di *Bouguer* e di *Lambert*, i quali oltre i detti elementi giudicano necessario d'introdurvi ancora il seno dell'angolo d'emanazione, vale a dire quell'angolo, che fa il raggio lucido colla superficie del corpo luminoso, da cui emana.

41. Non dipartendomi dalle traccie del ch. Autore stabilisco che dalla circonferenza raggiante del cerchio *SMRB* venga illuminato il punto *F* (*fig. 3*), per cui e pel centro *C* del cerchio conduco il diametro *BR*. Prendo poi l'arco variabile *RM*, e guidato il raggio *CM*, indi da *M* calata sul diametro la normale *MN*, chiamo ϕ l'angolo *MCO*, essendo *O* il punto, ove concorre col raggio prodotto la tangente *MO*. Fatto poi $CR = r$, $CF = K$, che dà $RF = K + r$, avremo $CN = r \cdot \cos \phi$; $NM = r \cdot \sin \phi$; $NF = K + r \cdot \cos \phi$, e l'archetto infinitesimo $Mm = r d\phi$. Secondo l'ipotesi Euleriana, supposta *T* una data illuminazione, farà quella che raccoglie *F*

dall'archetto $Mm = \frac{Trd\phi}{(FM)^2} = \frac{Trd\phi}{K^2 + r^2 + 2Kr \cdot \cos \phi}$, perchè

$FM = \sqrt{((FN)^2 + (NM)^2)} = \sqrt{(K^2 + r^2 + 2Kr \cdot \cos \phi)}$.

Adottando poi l'ipotesi di *Lambert*, bisogna moltiplicare il trovato differenziale pel seno dell'angolo *FMO*, che è l'angolo d'emanazione. Ora $FMO = FMN + MCO = FMN + \phi$, e in conseguenza $\sin FMO = \sin FMN \cdot \cos \phi$

$$+ \sin \phi \cdot \cos FMN = \frac{(K + r \cos \phi) \cos \phi + r (\sin \phi)^2}{FM}$$

$= \frac{K \cdot \cos \phi + r}{\sqrt{(K^2 + r^2 + 2Kr \cdot \cos \phi)}}$. Perilchè la quantità di luce,

che da *Mm* si comunica a *F* con quest'ultima ipotesi, risul-

ta $\frac{Trd\phi (r + K \cdot \cos \phi)}{(K^2 + r^2 + 2Kr \cdot \cos \phi)^{3/2}} = \frac{Tr}{b^{3/2}} \left(\frac{d\phi (r + K \cdot \cos \phi)}{(1 + e \cdot \cos \phi)^{3/2}} \right)$, ove

si ponga $K^2 + r^2 = b$, $\frac{2Kr}{K^2 + r^2} = e$. Quest' ultima sostituzione fa conoscere, che e debb' esser sempre minore dell' unità, perchè $K^2 + r^2 > 2Kr$ in tutti i casi.

42. Arrivato il P. *Fontana* alla formola $\frac{d\phi(r + K \cdot \cos. \phi)}{(1 + e \cdot \cos. \phi)^{3/2}}$, intraprende d' integrarla coll' ajuto delle serie; ma queste gli risultano sì incommode e involupate, che io ho creduto tornar meglio assai di rivolgersi ad integrarla colle rettificazioni degli archi ellittici ed iperbolici, ottenendosi per tal mezzo una illuminazione totale, che riesce al maggior segno elegante.

43. Per piegar la formola a ricever l' aspetto di una di quelle, che negli antecedenti numeri abbiamo già integrato,

faccio $1 + e \cdot \cos. \phi = \frac{1}{x^2}$; onde nasce $\cos. \phi = \frac{1 - x^2}{ex^2}$;

$r + K \cdot \cos. \phi = \frac{erx^2 - Kx^2 + K}{ex^2}$; $1 + \cos. \phi = \frac{1 - x^2(1 - e)}{ex^2}$;

$1 - \cos. \phi = -\frac{1 + x^2(1 + e)}{ex^2}$;

$\text{sen. } \phi = \frac{\sqrt{(1 - x^2(1 - e))} \sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}{ex^2}$. E perchè $\cos. \phi$

cala a misura che cresce l' arco RM , farà, differenziando la prima equazione, $-e d\phi \cdot \text{sen. } \phi = -\frac{2dx}{x^3}$, cioè

$d\phi = \frac{2dx}{x \sqrt{(1 - x^2(1 - e))} \sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}$ e quindi

$\frac{Tr}{b^{3/2}} \cdot \frac{d\phi(r + K \cdot \cos. \phi)}{(1 + e \cdot \cos. \phi)^{3/2}}$

$= \frac{2Tr}{b^{3/2}} \cdot \frac{dx(erx^2 - Kx^2 + K)}{e \sqrt{(1 - x^2(1 - e))} \sqrt{(-1 + x^2(1 + e))}}$.

44. Lascio da parte il fattor costante $\frac{2Tr}{b^{3/2}}$, e m' accingo ad integrare la formola;

$\frac{dx(erx^2 - Kx^2 + K)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$, che esprimo con equi-

valenza in tal modo ; $\frac{dx(erx^2 + eKx^2 - eKx^2 + K - Kx^2)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}$

$$= \frac{(r+K)x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}} - \frac{Kdx\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}}.$$

Posto in seguito $\sqrt{(1-x^2(1-e))} = z$, mi nasce ;

$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}} = \frac{-dz\sqrt{(1-z^2)}}{(1-e)\sqrt{(2e-z^2(1+e))}},$$

di cui l' integrale è $= \frac{-1}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} \left(\text{arco ellittico di} \right.$
 $1.^{\circ} \text{ fem. } 1 ; \text{ ascissa cent. nel } 1.^{\circ} \text{ asse ; } \frac{z\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}} \Bigg)$, come

$$2.^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$$

porta il confronto colla 1.^a formola del num. 19. Coll' ajuto poi del 2.^o Lemma si troverà l' integrale dell' altra formola ;

$$\frac{dx\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}} = \frac{x\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}} - \frac{1}{\sqrt{(1-e)}} \left(\text{arco iperbolico di } 1.^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}} ; \text{ ascissa } 2.^{\circ} \text{ fem. } 1 \right.$$

cent. nel 2.^o asse ; $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \times \frac{\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}{\sqrt{(1-x^2(1-e))}}$). Quindi nella precedente integrazione surrogando a z il suo valore $\sqrt{(1-x^2(1-e))}$, farà ;

$$\int \frac{dx(erx^2 - Kx^2 + K)}{e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}} = - \frac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} \left(\text{arco ellittico di } 1.^{\circ} \text{ fem. } 1 ; \text{ ascissa cent. nel } 1.^{\circ}, \right.$$

$$2.^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}} \\ \text{Ffffff ij}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{V(1+e)}{\sqrt{2e}} \cdot V(1-x^2(1-e)) - \frac{Kx V(-1+x^2(1+e))}{e V(1-x^2(1-e))} \\
& + \frac{K}{e V(1-e)} \left(\text{arco iperbolico di } 1.^{\circ} \text{ sem. } \frac{\sqrt{2e}}{V(1-e)}; \text{ ascissa } \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. 2.^{\circ} \text{ sem. } 1 \right. \\
& \text{cent. nel } 2.^{\circ}; \frac{V(1-e)}{V(1+e)} \times \frac{V(-1+x^2(1+e))}{V(1-x^2(1-e))} \Big) + C : \text{o ri-} \\
& \text{tornando al simbolo } \cos. \phi; \frac{1}{2} \int \frac{d\phi (r+K \cdot \cos. \phi)}{(1+e \cdot \cos. \phi)^{3/2}} \\
& = - \frac{(r+K)}{(1-e) V(1+e)} \left(\text{arco ellittico di } 1.^{\circ} \text{ sem. } 1; \text{ ascissa } \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. 2.^{\circ} \text{ sem. } \frac{\sqrt{1-e}}{V(1+e)} \right. \\
& \text{cent. nel } 1.^{\circ} \frac{V(1+e)}{\sqrt{2}} \times \frac{V(1+\cos. \phi)}{V(1+e \cdot \cos. \phi)} \Big) \\
& - \frac{K V(1-\cos. \phi)}{e V(1+e \cdot \cos. \phi) V(1+\cos. \phi)} + \frac{K}{e V(1-e)} \left(\text{arco iper-} \right. \\
& \text{bolico di } 1.^{\circ} \text{ sem. } \frac{\sqrt{2e}}{V(1-e)}; \text{ ascissa centrale nel } 2.^{\circ}, \\
& \qquad \qquad \qquad \left. 2.^{\circ} \text{ sem. } 1 \right. \\
& \frac{V(1-e)}{V(1+e)} \cdot \frac{V(1-\cos. \phi)}{V(1+\cos. \phi)} \Big) + C.
\end{aligned}$$

45. Quando l'arco RM è nullo, necessariamente debb'esser nulla l'illuminazione. Fatto pertanto $\cos. \phi = 1$, che corrisponde all'arco $RM = 0$, verremo a determinare la costante C . Ora in questa supposizione l'ascissa centrale dell'arco ellittico diventa 1 , cioè il $1.^{\circ}$ semiasse; il che vuol dire, che l'arco si cangia nel quadrante \mathcal{Q} dell'ellissi; in oltre svaniscono i due susseguenti termini dell'integrazione. Dunque ci si presenterà l'equazione;

$$0 = - \frac{(r+K)\mathcal{Q}}{(1-e) V(1+e)} + C, \text{ cioè } C = \frac{(r+K)\mathcal{Q}}{(1-e) V(1+e)}; \text{ e}$$

perciò sarà l'integrale completo della nostra formola

$$= \frac{(r+K)}{(1-e)\sqrt{1+e}} \left(\mathcal{Q} - \text{arco ellittico di } 1^{\circ} \text{ fem. } 1; \text{ ascissa } 2^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \right)$$

$$\text{nel } 1^{\circ}; \frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos. \phi}}{\sqrt{1+e \cos. \phi}} \Bigg)$$

$$- \frac{K}{e\sqrt{1-e}} \left(\frac{\sqrt{1-e}\sqrt{1-\cos. \phi}}{\sqrt{1+e \cos. \phi}\sqrt{1+\cos. \phi}} - \text{arco iperbolico di } 1^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{1-e}}; \text{ ascissa nel } 2^{\circ}; \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos. \phi}}{\sqrt{1+\cos. \phi}} \right) = (H) \left(\frac{r+K}{(1-e)\sqrt{1+e}} \right) \left(\text{arco ellittico di } 1^{\circ} \text{ fem. } 1; \text{ ascissa nel } 2^{\circ}; \right.$$

$$\left. 2^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \right)$$

$$\frac{(1-e)\sqrt{1-\cos. \phi}}{\sqrt{2}\sqrt{1+e}\sqrt{1+e \cos. \phi}} \Bigg)$$

$$- \frac{K}{e\sqrt{1-e}} \left(\frac{\sqrt{1-e}\sqrt{1-\cos. \phi}}{\sqrt{1+e \cos. \phi}\sqrt{1+\cos. \phi}} - \text{arco iperbolico di } 1^{\circ} \text{ fem. } \frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{1-e}}; \text{ ascissa nel } 2^{\circ}; \right.$$

$$\left. 2^{\circ} \text{ fem. } 1 \right)$$

$$\frac{\sqrt{1-e}\sqrt{1-\cos. \phi}}{\sqrt{1+e}\sqrt{1+\cos. \phi}} \Bigg).$$

46. Cresciuto l' arco *RM* fino a divenire la semiperiferia *RMB*, si cangia $\cos. \phi$ in -1 , e l' ascissa centrale dell' arco ellittico in (H) si fa eguale al 2° semiasse; ovvero l' arco si fa il quadrante \mathcal{Q} dell' ellisse, mentre gli altri due termini, che seguitano, son due quantità infinite. Queste, introdotta la modificazione di $\cos. \phi = -1$, si scrivano così;

$$- \frac{K}{e\sqrt{1-e}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos. \phi}} - \text{arco iperbolico di}$$

1.° fem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; ascissa nel 2.°; $\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+\cos\phi)}}$);
 2.° fem. 1

ed invocato il numero VIII, che ci dà per nostra iperbola
 $\frac{CV}{CA} = \frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{(1-e)}}$; $\frac{CG'}{CK} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1+\cos\phi)}}$, troverem l' as-
 sintoto $= \frac{CV}{CA} \cdot \frac{CG'}{CK} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\cos\phi)}}$. Sicchè i due sopranno-

tati termini dentro la parentesi vengono ad esprimere la dif-
 ferenza Δ tra l'asintoto e l'arco iperbolico infinito; e per-
 ciò l' integrale spettante alla semicirconferenza RMB farà ;

$\frac{(r+K)\mathcal{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} - \frac{K\Delta}{e\sqrt{(1-e)}}$, appartenendo \mathcal{Q} all' ellissi di

1.° fem. 1 ; 2.° fem. $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$, e Δ all' iperbola di

1.° fem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2.° fem. 1.

47. Poichè il 1.° semiasse dell' ellissi, cui spetta il qua-
 drante \mathcal{Q} , è 1, e il 2.° $\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}$, nella serie (B) del num.

9. farà $a=1$, $b=\frac{\sqrt{(1+e)}}{\sqrt{2e}}$, $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1+e)}}$, dai quali va-

lori risulta $\mathcal{Q} = \frac{\Phi}{2} - \frac{\Phi}{2} \left(\frac{1.2e}{2^2(1+e)} + \frac{1^2.3.2^2e^2}{2^2.4^2(1+e)^2} \right.$

$\left. + \frac{1^2.3^2.5.2^3e^3}{2^2.4^2.6^2(1+e)^3} \text{ ecc.} \right)$. Parimente riferendosi Δ all' iperbo-

la di 1.° fem. $\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; 2.° fem. 1, nell'altra serie (F) del

num. 18. farà $a=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1-e)}}$; $b=\frac{2e}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}$, e

$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2e}}{\sqrt{(1+e)}}$, onde si trae $\Delta = \frac{e\phi}{2\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}}$

$+ \frac{e\phi}{\sqrt{(1+e)}\sqrt{(1-e)}} \left(\frac{1^2.2e}{2^2.4(1+e)} + \frac{1^2.3^2.2^2e^2}{2^2.4^2.6(1+e)^2} \right.$

+ $\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2 e^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8(1+e)^3}$ ecc.). Sostituendo pertanto questi valori

nell' integrale $\frac{(r+K) \mathcal{Q}}{(1-e)\sqrt{(1+e)}} - \frac{K\Delta}{e\sqrt{(1-e)}}$, e rimesso anco-

ra il fattore $\frac{2Tr}{b^{3/2}}$, si avrà la metà dell'illuminazione che in-

veste il punto $F = \frac{Tr^2\phi}{b^{3/2}(1-e)\sqrt{(1+e)}} - \frac{Tr\phi(r+K)}{b^{3/2}(1-e)\sqrt{(1+e)}}$

$\left(\frac{1 \cdot 2e}{2^2(1+e)} + \frac{1^2 \cdot 3 \cdot 2^2 e^2}{2^2 \cdot 4^2 (1+e)^2} \text{ ecc.} \right) - \frac{2TrK\phi}{b^{3/2}(1-e)\sqrt{(1+e)}}$

$\left(\frac{1^2 \cdot 2e}{2^2 \cdot 4(1+e)} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 e^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6(1+e)} \text{ ecc.} \right) = (H) \frac{Tr^2\phi}{(r-K)^2(r+K)}$

$- \frac{Tr\phi}{(r-K)^2} \left(\frac{1 \cdot 2^2 Kr}{2^2(r+K)^2} + \frac{1^2 \cdot 3 \cdot 2^4 K^2 r^2}{2^2 \cdot 4^2 (r+K)^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2^6 K^3 r^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 (r+K)^6} \text{ ecc.} \right)$

$- \frac{2TrK\phi}{(r-K)^2(r+K)} \left(\frac{1^2 \cdot 2^2 Kr}{2^2 \cdot 4(r+K)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4 K^2 r^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6(r+K)^4} \right.$

$\left. + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^6 K^3 r^3}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8(r+K)^6} \text{ ecc.} \right) = \frac{Tr^2\phi}{(r-K)^2(r+K)}$

$- \frac{Tr\phi}{(r-K)^2} \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 2^2 Kr}{2^2(r+K)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 2^2 Kr \cdot A}{4^2(r+K)^2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 2^2 Kr \cdot B}{6^2(r+K)^2} \right.$

$\left. + \frac{5 \cdot 7 \cdot 2^2 Kr \cdot C}{8^2(r+K)^2} \text{ ecc.} \right) - \frac{2TrK\phi}{(r-K)^2(r+K)} \left(\frac{1^2 \cdot 2^2 Kr}{4 \cdot 4(r+K)^2} \right.$

$\left. + \frac{3^2 \cdot 2^2 Kr \cdot A'}{4 \cdot 6(r+K)^2} + \frac{5^2 \cdot 2^2 Kr \cdot B'}{6 \cdot 8(r+K)^2} + \frac{7^2 \cdot 2^2 Kr \cdot C'}{8 \cdot 10(r+K)^2} \text{ ecc.} \right)$ Le majuscole

A, B, C ecc.; A', B', C' ecc. di quest' ultima serie sono i termini, che precedono immediatamente.

48. Vogliasi a cagion d' esempio, che il punto F resti collocato alla metà del raggio CB . Divenendo in tal caso

$K = \frac{r}{2}$, la metà della illuminazione si fa $= \frac{8T\phi}{r} - \frac{4T\phi}{r}$

$\left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 8}{2^2 \cdot 9} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 8A}{4^2 \cdot 9} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 8B}{6^2 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 7 \cdot 8C}{8^2 \cdot 9} \text{ ecc.} \right) = \frac{8T\phi}{3r} \left(\frac{1^2 \cdot 8}{4 \cdot 4 \cdot 9} \right.$

$\left. + \frac{3^2 \cdot 8A'}{4 \cdot 6 \cdot 9} + \frac{5^2 \cdot 8B'}{6 \cdot 8 \cdot 9} + \frac{7^2 \cdot 8C'}{8 \cdot 10 \cdot 9} \text{ ecc.} \right)$. Nell' una e nell' altra se-

rie vanno presi 32 termini, se si vuole spingere l' approssimazione fino a tre, o quattro decimali; e dopo le necessarie riduzioni proviene la suddetta metà di luce

$$= \frac{T\phi}{r} (1. 246066), \text{ ovvero per maggior esattezza ne' nu-}$$

$$\text{meri, } = \frac{T\phi}{r} (1. 246). \text{ Ora, siccome quando } F \text{ cade nel cen-}$$

$$\text{tro } C, \text{ svaniscono } K \text{ ed } e, \text{ e nasce il valore della semi-illu-}$$

$$\text{minazione } = \frac{T\phi}{r}, \text{ se faremo, che } \frac{T\phi}{r} \text{ rappresenti l' unità di}$$

luce, farà quella, che riceve F situato alla metà del raggio CB alla semiperiferia raggiante $= 1. 246$, cioè 1 e poco più

di $\frac{1}{5}$.

49. A misura che s' intende F ritirarsi verso B , K s' accosta al valore di r , ed e al valore di 1, cosicchè fatto $K=r$, diventa $e=1$, e per ragione del fattore $(r-K)^2$ ne' denominatori della serie (H) , la illuminazione riesce infinita. Ciò però meglio si rileva, se ci riportiamo alla for-

$$\text{mula differenziale; } \frac{2Trdx(erx^2 - Kx^2 + K)}{b^{3/2} \cdot e\sqrt{(1-x^2(1-e))}\sqrt{(-1+x^2(1+e))}}.$$

Questa nell' ipotesi di $e=1$ così si modifica; $\frac{2Tr^2dx}{b^{3/2}\sqrt{(-1+2x^2)}}$

$$= \frac{Tdx}{r\sqrt{2}\sqrt{(-1+2x^2)}}, \text{ di cui l' integrale completo è}$$

$$= \frac{T}{2r} L \left(\frac{1}{x\sqrt{2} - \sqrt{(2x^2-1)}} \right) = \frac{T}{2r} L \left(\frac{\sqrt{(1+\cos.\phi)}}{\sqrt{2} - \sqrt{(1-\cos.\phi)}} \right)$$

$$= \frac{T}{2r} L \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1-\cos.\phi)}}{\sqrt{(1+\cos.\phi)}} \right), \text{ onde si deduce, che quando}$$

$\cos.\phi = -1$, cioè quando F cade in B , viene F investito da una luce infinita.

50. Questa infinità di luce non gli può derivare, che dall' unico punto raggiante B , in cui esso s' immerge, perchè qualunque arco RM minore di RB non gliene comunica che una quantità finita. Dunque l' indole del problema non

permette,

permette, che dopo aver supposta nulla l' illuminazione di F nella nullità dell' arco RM , si cerchi quanto lume investa F situato in R ; a motivo che la coincidenza di F con qualunque punto raggiante della periferia lo rende infinitamente illuminato; e ciò ripugna all' ipotesi della nullità di luce, che F raccoglie da R . Per la qual cosa appunto, volendo immergere F in qualche punto luminoso, ho scelto il punto opposto B , che salva egregiamente la prima supposizione.

51. E' cosa per altro curiosa il vedere a che s' agguagliano in tal caso i termini della nostra integrazione. Poichè l' immersione di F in B produce che sia $K=r$, $e=1$,

nasce la femi-illuminazione in genere $= \frac{T}{r(1-e)} \left(\text{arco ellittico di } 1^\circ. \text{ fem. } 1; \text{ ascissa nel } 2^\circ; \frac{(1-e)\sqrt{(1-\cos.\phi)}}{2\sqrt{(1+\cos.\phi)}} \right)$

$$- \frac{T\sqrt{(1-\cos.\phi)}}{r\sqrt{2(1+\cos.\phi)}} + \frac{T}{r\sqrt{2}\sqrt{(1-e)}} \left(\text{arco iperbolico di } 1^\circ. \text{ fem. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-e)}}; \text{ ascissa nel } 2^\circ; \frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1-\cos.\phi)}}{\sqrt{(1+\cos.\phi)}} \right).$$

2°. fem. 1
Il 1°. termine è un multiplo infinito d' un arco ellittico, che ha il semiasse secondo e l' ascissa centrale nulli; l' ultimo è parimente un multiplo infinito ma di un arco iperbolico che ha infinito il primo semiasse e nulla l' ascissa centrale, cosicchè parer potrebbe, che, prendendosi le ascisse nel 2°. asse, l' arco non differisse per niente dall' ascissa centrale

$$\text{e fosse il suo multiplo} = \frac{T}{r\sqrt{(1-e)} \cdot \sqrt{2}} \times \left(\frac{\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\cos.\phi)}}{\sqrt{(1+\cos.\phi)}} \right) = \frac{T}{2r} \times \frac{\sqrt{(1-\cos.\phi)}}{\sqrt{(1+\cos.\phi)}}, \text{ quantità}$$

algebraica e finita. E pure con tal conclusione cadrebbe in parallogismo, perchè differenziando sì il multiplo dell' arco ellittico come anche il multiplo dell' arco iperbolico, dopo

aver posto $u = \frac{\sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{\sqrt{(1 + \cos. \phi)}}$ e fatte le dovute sostituzioni, si arriva nell' uno e nell' altro caso al differenziale $\frac{T du \sqrt{(1 + u^2)}}{2r}$, il cui integrale farà ai suddetti due multipli

comune. Ora quest' integrale è $\frac{T}{4r} (u \sqrt{(1 + u^2)} + l. (u + \sqrt{(1 + u^2)})) = \frac{T}{4r} \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{1 + \cos. \phi} + l. \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{\sqrt{(1 + \cos. \phi)}} \right) \right)$, cioè d' un valore onninamente diverso dal superiore; $\frac{T}{2r} \times \frac{\sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{\sqrt{(1 + \cos. \phi)}}$; e può servir d' avviso ai calcolatori di non trar troppo presto conclusioni dai loro calcoli, senza aver prima esaminato ogni cosa colla maggiore attenzione. Intanto noi diremo, che, quando $e = 1$, varrà l' equazione; $\frac{1}{\sqrt{(1 - e)}} \left(\text{arco ellittico di } 1^\circ. \text{ sem. } 1; \text{ ascif-}$

$$2^\circ. \text{ sem. } \frac{\sqrt{(1 - e)}}{\sqrt{2}}$$

sa nel 2° ; $\frac{(1 - e) \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{2 \sqrt{(1 + \cos. \phi)}} \Big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\text{arco iperbolico di } 1^\circ. \text{ sem. } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1 - e)}}; \text{ asciffa nel } 2^\circ; \frac{\sqrt{(1 - e)}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{\sqrt{(1 + \cos. \phi)}} \right);$
 $2^\circ. \text{ sem. } 1$

e che i due archi multipli presi insieme verranno a formar l' integrale $\frac{T}{2r} \left(\frac{\sqrt{2} \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{1 + \cos. \phi} + l. \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{\sqrt{(1 + \cos. \phi)}} \right) \right) = \frac{T \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{r \sqrt{2} (1 + \cos. \phi)} + \frac{T}{2r} l. \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{\sqrt{(1 + \cos. \phi)}} \right)$. Aggiunto

poi a questi due il termine algebrico $-\frac{T \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{r \sqrt{2} (1 + \cos. \phi)}$, si ottiene la mezza illuminazione $= \frac{T}{2r} l. \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{(1 - \cos. \phi)}}{\sqrt{(1 + \cos. \phi)}} \right)$ tal quale precisamente s' è trovata al num°. 49.

M E M O R I A

SULL' EQUAZIONI A DIFFERENZE FINITE E PARZIALI.

Del Sig. PIETRO PAOLI Pubblico Professore nella
Univerlità di Pavia.

I Due illustri Geometri, i Signori *de la Place* e *de la Grange* hanno insegnato ad integrare l'equazioni a differenze finite e parziali. Il primo nel Tomo 6.^o e 7.^o delle *Memorie presentate all' Accademia di Parigi* ha dato un metodo generale per integrare l'equazioni lineari a differenze finite e parziali di un ordine qualunque n , a coefficienti comunque variabili o costanti. Il secondo nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* dell' anno 1775. ha dato due metodi per integrare le medesime equazioni, quando i coefficienti sono costanti. Se $Z^{(y, x)}$ rappresenta una funzione delle variabili y ed x , l'equazioni finora trattate si riducono alla forma seguente:

$$\begin{aligned} Z^{(y, x)} = & AZ^{(y-1, x)} + BZ^{(y-2, x)} + \dots + NZ^{(y-n, x)} + X \\ & + A'Z^{(y, x-1)} + B'Z^{(y-1, x-1)} + \dots + N'Z^{(y-n, x-1)} \\ & + A''Z^{(y, x-2)} + B''Z^{(y-1, x-2)} + \dots + N''Z^{(y-n, x-2)} \\ & \vdots \\ & + A^{(n)}Z^{(y, x-n)} + B^{(n)}Z^{(y-1, x-n)} + \dots + N^{(n)}Z^{(y-n, x-n)} \end{aligned}$$

ove per A , A' , ecc., B , B' , ecc., e per X il Sig. *de la Place* intende qualunque funzione data di x ; il Sig. *de la Grange* suppone che A , B , ecc. siano quantità costanti, ed $X=0$: ambedue pongono n essere una quantità costante.

Niuno di loro ha mai pensato a trattare quel caso, in cui

le differenze di y suppongonti funzioni della variabile x (a). Tale è l'equazione semplicissima $Z^{(y, x)} = Z^{(y-x, x)} + Z^{(y-1, x-1)}$, alla quale si giunge, se il numero delle maniere si cerca, nelle quali un numero y può esser la somma di x termini della serie naturale 1, 2, 3, 4, 5 ecc. I metodi del Sig. *de la Grange* sono inapplicabili a questa sorte di equazioni: quello del Sig. *de la Place* può applicarvi, come vedremo in appresso; ma egli non ha mai considerate quest'equazioni. Avendomi pertanto il primo metodo del Sig. *de la Grange* suggerita un'altra via, per cui giunger si può alla integrazione di quest'equazioni, ho pensato di presentare ai Geometri un saggio di quelle ricerche, che ho fatte in questa materia.

A R T I C O L O I.

Dell' integrazione dell' equazioni a differenze finite, variabili, e parziali.

$$\begin{aligned} 1. \text{ Sia pertanto proposto d' integrar l' equazione} \\ Z^{(y, x)} = A^{(x)} Z^{(y-1, x)} + B^{(x)} Z^{(y-2, x)} + \dots + X^{(x)} Z^{(y-x, x)} + \dots \\ + A'^{(x)} Z^{(y, x-1)} + B'^{(x)} Z^{(y-1, x-1)} + \dots + X'^{(x)} Z^{(y-x, x-1)} + \dots \end{aligned}$$

ove $A^{(x)}$, $A'^{(x)}$, $B^{(x)}$, $B'^{(x)}$, ecc. esprimono funzioni date di x , e nelle diverse funzioni $Z^{(y-1, x)}$, $Z^{(y-1, x-1)}$, ecc. la y può variare comunque, purchè però la sua variazione sia sempre una funzione di x .

Supponghiamo, che l'integrale cercato abbia questa forma:

$$Z^{(y, x)} = m a^y \nabla_x^\alpha + n b^y \nabla_x^\beta + p c^y \nabla_x^\gamma + \text{ecc.}$$

ove le lettere m , n , p , ecc. a , b , c , ecc. esprimono quan-

(a) Il Sig. Cav. *Lorgna* è il primo, che abbia trattato delle funzioni ed equazioni differenziali finite a due variabili, supponendo le differenze di y funzioni della variabile x (Mem. della Società Italiana Tomo I. pag. 377,

388, 395 e segu.); ma non ha ancora pubblicato la continuazione delle sue ricerche sull'equazioni a più di due variabili, come s'è proposto di fare alla pag. 375.

tà costanti, α , β , γ , ecc. sono funzioni di x ; ∇x secondo la maniera di scrivere del Sig. *de la Place* rappresenta il prodotto $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \dots \alpha_x$; in modo che sarà ∇x_{x-1}

$= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \dots \alpha_{x-1}$, e perciò $\nabla x = \alpha_x \nabla \alpha_{x-1}$: il nu-

mero poi de' termini dell' integrale è indefinito. Sostituendo adunque nella equazione proposta in luogo di $Z^{(y, x)}$ il di lui valore, avremo

$$\begin{aligned} m a^y \nabla x &= m A a^{y-1} \nabla x + m B a^{y-2} \nabla x + \dots \\ &+ m X a^{y-x} \nabla x + \dots + m A' a^y \nabla \alpha_{x-1} \\ &+ m B' a^{y-1} \nabla x + \dots + m X' a^{y-x} \nabla x + \dots \\ + n b^y \nabla \beta &+ n A b^{y-1} \nabla \beta + n B b^{y-2} \nabla \beta + \dots \\ &+ n X b^{y-x} \nabla \beta + \dots + n A' b^y \nabla \beta_{x-1} \\ &+ n B' b^{y-1} \nabla \beta + \dots + n X' b^{y-x} \nabla \beta + \dots \\ + p c^y \nabla \gamma &+ p A c^{y-1} \nabla \gamma + p B c^{y-2} \nabla \gamma + \dots \\ &+ p X c^{y-x} \nabla \gamma + \dots + p A' c^y \nabla \gamma_{x-1} \\ &+ p B' c^{y-1} \nabla \gamma + \dots + p X' c^{y-x} \nabla \gamma + \dots \\ &+ \text{ecc.} \quad + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Per soddisfare a questa equazione, ponghiamo

$$\begin{aligned} m a^y \nabla x &= m A a^{y-1} \nabla x + m B a^{y-2} \nabla x + \dots \\ &+ m X a^{y-x} \nabla x + \dots + m A' a^y \nabla \alpha_{x-1} \\ &+ m B' a^{y-1} \nabla x + \dots + m X' a^{y-x} \nabla x + \dots \\ n b^y \nabla \beta &= n A b^{y-1} \nabla \beta + n B b^{y-2} \nabla \beta + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + nX_{\kappa} b^{y-\kappa} \nabla \beta_{\kappa} + \dots + nA'_{\kappa} b^y \nabla \beta_{\kappa-1} \\
& + nB'_{\kappa} b^{y-1} \nabla \beta_{\kappa-1} + \dots + nX'_{\kappa} b^{y-\kappa} \nabla \beta_{\kappa-1} + \dots \\
p c^y \nabla \gamma_{\kappa} &= pA_{\kappa} c^{y-1} \nabla \gamma_{\kappa} + pB_{\kappa} c^{y-2} \nabla \gamma_{\kappa} + \dots \\
& + pX_{\kappa} c^{y-\kappa} \nabla \gamma_{\kappa} + \dots + pA'_{\kappa} c^y \nabla \gamma_{\kappa-1} \\
& + pB'_{\kappa} c^{y-1} \nabla \gamma_{\kappa-1} + \dots + pX'_{\kappa} c^{y-\kappa} \nabla \gamma_{\kappa-1} + \dots
\end{aligned}$$

ecc.

e siccome $\nabla \alpha_{\kappa} = \alpha_{\kappa} \nabla \alpha_{\kappa-1}$, $\nabla \beta_{\kappa} = \beta_{\kappa} \nabla \beta_{\kappa-1}$,

$\nabla \gamma_{\kappa} = \gamma_{\kappa} \nabla \gamma_{\kappa-1}$, ecc. avremo

$$\begin{aligned}
\alpha_{\kappa} &= \frac{A'_{\kappa} + B'_{\kappa} a^{-1} + \dots + X'_{\kappa} a^{-\kappa} + \dots}{1 - A_{\kappa} a^{-1} - B_{\kappa} a^{-2} - \dots - X_{\kappa} a^{-\kappa} - \dots} \\
\beta_{\kappa} &= \frac{A'_{\kappa} + B'_{\kappa} b^{-1} + \dots + X'_{\kappa} b^{-\kappa} + \dots}{1 - A_{\kappa} b^{-1} - B_{\kappa} b^{-2} - \dots - X_{\kappa} b^{-\kappa} - \dots} \\
\gamma_{\kappa} &= \frac{A'_{\kappa} + B'_{\kappa} c^{-1} + \dots + X'_{\kappa} c^{-\kappa} + \dots}{1 - A_{\kappa} c^{-1} - B_{\kappa} c^{-2} - \dots - X_{\kappa} c^{-\kappa} - \dots}
\end{aligned}$$

ecc.

e quindi ancora i valori di $\nabla \alpha_{\kappa}$, $\nabla \beta_{\kappa}$, $\nabla \gamma_{\kappa}$, ecc.

2. Si riduca in serie discendente la quantità $\nabla \alpha_{\kappa}$, lo che

secondo i diversi casi potrà per i metodi cogniti farsi in diverse maniere. In generale ponghiamo

$$\nabla \alpha_{\kappa} = A + A' a^{-1} + A'' a^{-2} + A''' a^{-3} + \text{ecc.}$$

e prendendo i logaritmi avremo

$$l. \nabla \alpha_{\kappa} = l. (A + A' a^{-1} + A'' a^{-2} + A''' a^{-3} + \text{ecc.})$$

Differenziando adesso nell' ipotesi di x costante, ed a variabile, farò

$$\frac{-a^2 d \nabla_x}{\nabla_x . d a} = \frac{A' + 2A''a^{-1} + 3A'''a^{-2} + \text{ecc.}}{A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}}.$$

Ora, essendo ∇_x una funzione fratta di a^{-1} , se cerchia-

mo le radici del numeratore e del denominatore di questa frazione, cioè i valori di a facendo l'uno e l'altro $= 0$; è facile il vedere, che posta $r =$ alla somma delle radici del denominatore meno quelle del numeratore, $r' =$ ai quadrati delle radici del denominatore meno quelli del numeratore, e in generale $r^{(m)} =$ alle potenze $(m+1)^{\text{esima}}$ delle radici del denominatore meno le potenze $(m+1)^{\text{esima}}$ delle radici del numeratore, avremo

$$\frac{-a^2 d \nabla_x}{\nabla_x . d a} = r + r'a^{-1} + r''a^{-2} + r'''a^{-3} + \text{ecc.}$$

Sarà dunque

$$\begin{aligned} & r + r'a^{-1} + r''a^{-2} + r'''a^{-3} + \text{ecc.} \\ &= \frac{A' + 2A''a^{-1} + 3A'''a^{-2} + \text{ecc.}}{A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}}. \end{aligned}$$

Quindi si deduce

$$\begin{aligned} A' &= Ar \\ 2A'' &= A'r + Ar' \\ 3A''' &= A''r + A'r' + Ar'' \\ 4A^{(4)} &= A'''r + A''r' + A'r'' + Ar''' \\ &\text{ecc.} \end{aligned}$$

La quantità A si determinerà ponendo $a=0$ nella funzione ∇_x . Dall' equazioni precedenti si rileva

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} &= r \\ \frac{A}{A} &= \frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{A''}{A} = \frac{r''}{3} + r \frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r}{3}$$

$$\frac{A''''}{A} = \frac{r''''}{4} + r \frac{r'''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r''}{4} + \left(\frac{r''}{3} + r \frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r}{3} \right) \frac{r'}{4}$$

e in generale

$$\begin{aligned} \frac{A^{(m+1)}}{A} = & \frac{r^{(m)}}{m+1} + r \frac{r^{(m-1)}}{m+1} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r^{(m-2)}}{m+1} + \left(\frac{r''}{3} + r \frac{r'}{3} \right. \\ & + \left. \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r}{3} \right) \frac{r^{(m-3)}}{m+1} + \left(\frac{r'''}{4} + r \frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r'}{4} \right. \\ & + \left. \left(\frac{r''}{3} + r \frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r}{3} \right) \frac{r}{4} \right) \frac{r^{(m-4)}}{m+1} \\ & + \left\{ \frac{r''''}{5} + r \frac{r'''}{5} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r''}{5} + \left(\frac{r''}{3} + r \frac{r'}{3} \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r'}{3} \right) \frac{r'}{5} + \left(\frac{r'''}{4} + r \frac{r''}{4} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r}{4} \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{r''}{3} + r \frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r}{2} \right) \frac{r}{3} \right) \frac{r}{4} \right) \frac{r}{5} \right\} \frac{r^{(m-5)}}{m+1} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Merita di essere osservata questa formola per la legge, che osservano tra di loro i di lei diversi termini. Il coefficiente del secondo termine si ha ponendo nel primo $m=0$; il coefficiente del terzo facendo nel primo e nel secondo $m=1$; e generalmente il coefficiente del termine $(\mu+2)^{\text{esimo}}$ facendo ne' termini antecedenti $m=\mu$.

3. Abbiamo dunque

$$\nabla_x^\alpha = A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}$$

ed è evidente che farà similmente

$$\nabla_b^\beta = A + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

$$\nabla_c^\gamma = A + A'c^{-1} + A''c^{-2} + A'''c^{-3} + \text{ecc.}$$

ecc.

Dunque l' integrale cercato farà

$Z(y-x)$

$$\begin{aligned} Z^{(y, x)} = & mAa^y + mA'a^{y-1} + mA''a^{y-2} + mA'''a^{y-3} + \text{ecc.} \\ & + nAb^y + nA'b^{y-1} + nA''b^{y-2} + nA'''b^{y-3} + \text{ecc.} \\ & + pAc^y + pA'c^{y-1} + pA''c^{y-2} + pA'''c^{y-3} + \text{ecc.} \\ & + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Ma la quantità $ma^y + nb^y + pc^y + \text{ecc.}$ può rappresentare qualunque funzione di y ; supponghiamo dunque che questa funzione di y sia $\phi.y$, ed avremo

$$Z^{(y, x)} = A\phi.y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

La funzione $\phi.y$ è quella funzione arbitraria, che deve aver luogo nell' integrale della equazione proposta. Per determinarla conviene che sia dato il valore di $Z^{(y, 0)}$, cioè il valore di $Z^{(y, x)}$, quando vi si fa $x=0$, come più chiaramente vedremo ne' casi particolari.

4. Ecco adunque come si deve operare per aver l' integrale della proposta equazione. Si faccia $Z^{(y, x)} = b^y \nabla \alpha$, e so-

stituendo questo valore di $Z^{(y, x)}$ nella proposta, se ne dedurrà il valore di α , e quindi quello di $\nabla \alpha$. Si riduca $\nabla \alpha$

nella serie $A + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$ e si avrà subito l' integrale cercato così espresso:

$$Z^{(y, x)} = A\phi.y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

5. Per applicare l' esposta Teoria ai casi particolari, cerchiamo il termine generale di alcune di quelle serie, che il Sig. *de la Place* ha chiamate *ricorro-ricorrenti*. Le serie di questa specie, che sono state finora trattate, erano tali, che un termine qualunque dipendeva con una certa legge da altri antecedenti sempre ugualmente remoti da quello: nelle serie, delle quali siamo per parlare, un termine dipende con una certa legge da altri sempre disugualmente distanti da quello.

PROBLEMA I.

6. Trovare il termine generale della serie

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	y
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
3	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45		
4	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84		
5	0	0	0	0	0	0	1	5	15	35	...	
x												

In questa serie ciascun termine dipende da altri due in modo, che è uguale alla somma del termine precedente della medesima linea orizzontale, e di quel termine della fila antecedente, il di cui posto è distante di $x-2$ unità dal numero proposto. Così nella quinta fila, ove $x=5$, ciascun numero, come il 35, è uguale al numero precedente 15 + quel numero che nella fila antecedente è nel terzo posto avanti il 35, che in questo caso è il 20. Sia $Z^{(y,n)}$ il termine generale di questa serie, e per le condizioni del Problema avremo l'equazione

$$Z^{(y,n)} = Z^{(y-1,n)} + Z^{(y-n+2,n-1)}$$

Ponghiamo $Z^{(y,n)} = b^y \nabla^n \alpha$, ed avremo $\alpha = b^{-1} \alpha + b^{-n+2} \alpha$,

$$\text{cioè } \alpha = \frac{b^{-n+2}}{1-b^{-1}}, \text{ e } \nabla^n \alpha = \frac{b \cdot b^0 \cdot b^{-1} \cdot b^{-2} \dots b^{-n+2}}{(1-b^{-1})^n}$$

$$= \frac{b^{-n(n-3):2}}{(1-b^{-1})^n}. \text{ Si riduca in serie per mezzo del Teorema}$$

Newtoniano la quantità $\frac{1}{(1-b^{-1})^n}$, e si avrà

$$\nabla^n \alpha = b^{-n(n-3):2} + x b^{-n(n-3):2-1} + \frac{x(x+1)}{2} b^{-n(n-3):2-2} + \text{ecc.}$$

Onde per le cose precedenti farà (+)

$$\begin{aligned} Z^{(y,n)} = & \phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2}\right) + x\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - 1\right) \\ & + \frac{x(x+1)}{2} \phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - 2\right) + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Adeſſo per determinare la funzione arbitraria $\phi.y$, facciamo $x=0$, ed avremo $Z^{(y,0)}=\phi.y$. Dunque $\phi.y$ è ciò che diviene $Z^{(y,*)}$, quando vi ſi fa $x=0$. Ma noi non conoſciamo il valore di $Z^{(y,0)}$; onde converrà dedurre il valore di queſta funzione da quello di $Z^{(y,1)}$, il quale è eſpreſſo dalla prima linea orizzontale della ferie propoſta. Biſogna prima oſſervare, che continuando la ferie dalla parte finiſtra, cioè dando ad y i valori $0, -1, -2$, ecc., i valori di $Z^{(y,1)}$ diverranno tutti $=0$, cioè farà $Z^{(0,1)}=0$, $Z^{(-1,1)}=0$, $Z^{(-2,1)}=0$, ecc. In fatti ponendo nella equazione del problema x ſucceſſivamente $=2, 3$, ecc., ed $y=0, 1, 2$, ecc. avremo

$$\begin{array}{ll} Z^{(0,1)}=Z^{(0,2)}-Z^{(-1,2)} & Z^{(-1,2)}=Z^{(0,3)}-Z^{(-1,3)} \\ Z^{(0,2)}=Z^{(1,3)}-Z^{(0,3)} & Z^{(-1,3)}=Z^{(1,4)}-Z^{(0,4)} \\ Z^{(0,3)}=Z^{(2,4)}-Z^{(1,4)} & Z^{(0,4)}=Z^{(3,5)}-Z^{(2,5)} \\ \text{ecc.} & \text{ecc.} \end{array}$$

Ora $Z^{(2,4)}=0$, e $Z^{(1,4)}=0$; dunque $Z^{(0,4)}=0$: quindi ficcome $Z^{(1,3)}=0$, farà $Z^{(0,3)}=0$. Coſì, ficcome $Z^{(3,5)}$ e $Z^{(2,5)}$ ſono $=0$, farà $Z^{(0,5)}=0$, $Z^{(-1,5)}=0$, $Z^{(-2,5)}=0$, e perciò $Z^{(0,1)}=0$. Nella medefima maniera ſi dimoſtrerà eſſere uguali a zero tutt' i valori di $Z^{(y,1)}$, quando y è negativa.

Adeſſo, ſe facciamo $x=1$, avremo $Z^{(y,1)}=Z^{(y-1,1)}+Z^{(y+1,0)}$. cioè $Z^{(y,0)}=Z^{(y-1,1)}-Z^{(y-2,1)}$; e quindi

$$\begin{array}{l} Z^{(0,0)}=Z^{(-1,1)}-Z^{(-2,1)}=0 \\ Z^{(1,0)}=Z^{(0,1)}-Z^{(-1,1)}=0 \\ Z^{(2,0)}=Z^{(1,1)}-Z^{(0,1)}=1 \\ Z^{(3,0)}=Z^{(2,1)}-Z^{(1,1)}=0 \\ \text{ecc.} \end{array}$$

Di qui apparisce, che la funzione $Z^{(y,0)}$ è $=1$ nel ſolo caſo di $y=2$; negli altri caſi è ſempre $=0$. Se adunque facciamo $y=\frac{x(x-3)}{2}=m=2$, farà

$$\phi\left(y-\frac{x(x-3)}{2}=m\right)=1, \text{ e } Z^{(y,*)} \text{ farà uguale al coefficiente del termine } \phi\left(y-\frac{x(x-3)}{2}=m\right), \text{ poichè gli altri}$$

termini della serie svaniscono. Essendo $m = y - \frac{x(x-3)}{2} - 2$,

si troverà questo coefficiente uguale a

$$x(x+1)(x+2) \dots x + y - \frac{x(x-3)}{2} - 3.$$

$$\frac{\dots}{1.2.3 \dots (y - \frac{x(x-3)}{2} - 2)}, \text{ e la funzione ri-}$$

cercata $Z^{(y, x)}$, o sia il termine generale della serie proposta

$$= \frac{x(x+1)(x+2) \dots x + y - \frac{x(x-3)}{2} - 3}{1.2.3 \dots (y - \frac{x(x-3)}{2} - 2)}.$$

Supponendo $y = 10$, $x = 5$, avremo il decimo termine della quinta fila $= \frac{5.6.7}{1.2.3} = 35$, come appunto è nella serie.

7. La funzione arbitraria introdotta nell'integrale della equazione proposta si è trovata essere $Z^{(y, x)}$; se vogliamo invece introdurre la funzione $Z^{(y, 1)}$, che data dalla prima linea della serie, basterà fare $Z^{(y, x)} = b^y \nabla^x$, supponendo

$$\nabla^x = \alpha_{x-1} \cdot \alpha_{x-2} \cdot \alpha_{x-3} \dots \alpha_{x-1}. \text{ Perchè avremo } \alpha_{x-1} = b^{-1} \alpha_{x-2}$$

$$+ b^{-x+2}, \text{ cioè } \alpha_{x-1} = \frac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}, \text{ e } \nabla^x = \frac{b^0 \cdot b^{-1} \cdot b^{-2} \dots b^{-x+2}}{(1-b^{-1})^{x-1}}$$

$$= \frac{b^{-(x-1)(x-2):2}}{(1-b^{-1})^{x-1}}, \text{ o sia } \nabla^x = b^{-(x-1)(x-2):2}$$

$$+ (x-1) b^{-(x-1)(x-2):2-1} + \frac{(x-1)x}{2} b^{-(x-1)(x-2):2-2} + \text{ecc. e}$$

quindi (4)

$$Z^{(y, x)} = \phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2}\right) + (x-1) \phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 1\right)$$

$$+ \frac{(x-1)x}{2} \phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$, abbiamo $\phi.y = Z^{(y, 1)}$, cioè $\phi.y = 1$, se y

è positiva, e = 0, se y è zero o negativa. Avremo dunque

$$Z^{(y, n)} = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)x}{2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{2 \cdot 3} + \dots \\ + \frac{(x-1)x \dots (x+y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 3)}{2 \dots (y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 1)}, \text{ la quale}$$

espressione combina coll' altra superiormente ritrovata.

8. Similmente, se si vorrà nell' integrale introdurre la funzione $Z^{(y, z)}$, basterà supporre $Z^{(y, n)} = b^{\nabla \alpha}$. Perchè so-

stituendo si avrà $\alpha_{n-2} = b^{-1} \alpha_{n-3} + b^{-n+2}$, cioè $\alpha_{n-2} = \frac{b^{-n+2}}{1-b^{-1}}$,

e $\nabla \alpha_{n-2} = \frac{b^{-(n-2)(n-1):2}}{(1-b^{-1})^{n-2}}$, cioè riducendo questo valore in serie

$$\nabla \alpha_{n-2} = b^{-(n-2)(n-1):2} + (x-2)b^{-(n-2)(n-1):2-1}$$

$$+ \frac{(x-2)(x-1)}{2} b^{-(n-2)(n-1):2-2} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y, n)} = \phi\left(y - \frac{(x-2)(x-1)}{2}\right) + (x-2)\phi\left(y - \frac{(x-2)(x-1)}{2} - 1\right) \\ + \frac{(x-2)(x-1)}{2} \phi\left(y - \frac{(x-2)(x-1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $n=2$, si ha $\phi y = Z^{(y, 2)}$, cioè $\phi y = y$, quando y è positiva, e = 0, quando y è zero o negativa. Quindi sarà

$$Z^{(y, n)} = y - \frac{(x-2)(x-1)}{2} + (x-2)\left(y - \frac{(x-2)(x-1)}{2} - 1\right) \\ + \frac{(x-2)(x-1)}{2} \left(y - \frac{(x-2)(x-1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

finchè si giunga ad un termine uguale a zero. Di qui si vede, come introdurre si possa nell' integrale che si cerca qualunque altra funzione espressa da una linea orizzontale della serie. E questo ha luogo generalmente, qualunque sia l'equazione, che si voglia integrare.

P R O B L E M A II.

9. *Trovare il termine generale della serie*

	1	2	3	4	5	6	7	8....y
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	3	7	15	31	63	127
3	0	0	0	1	6	25	90	301
4	0	0	0	0	0	0	1	10.....
⋮								
x								

In questa serie ciascun termine è uguale al termine precedente della medesima linea moltiplicato per x , più quel termine della linea antecedente, il di cui posto è distante di $x-1$ unità. Per esempio il termine 90 della terza fila, che corrisponde a $y=7$, è $=3 \cdot 25 + 15$, ove il 15 è quel termine che nella fila precedente corrisponde ad $y-x+1=7-2=5$. Supponghiamo che il termine generale di questa serie sia $Z^{(y,x)}$, ed avremo l'equazione

$$Z^{(y,x)} = x Z^{(y-1,x)} + Z^{(y-x+1,x-1)}$$

Facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla x$, e l'equazione proposta diventerà

$$x = x b^{-1} x + b^{-x+1}, \text{ cioè } x = \frac{b^{-x+1}}{1 - x b^{-1}}, \text{ e perciò}$$

$$\Delta x = \frac{b^{-x(x-1):2}}{(1-b^{-1})(1-2b^{-1})(1-3b^{-1})\dots(1-xb^{-1})}. \text{ Ponghia-}$$

$$\text{mo } \frac{1}{(1-b^{-1})(1-2b^{-1})\dots(1-xb^{-1})} = A + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

ed è chiaro essere $A=1$. Le radici del denominatore sono 1, 2, 3, x : dunque facendo (2)

$$r = 1 + 2 + 3 + \dots + x$$

$$r' = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + x^2$$

$$\vdots$$

$$r^{(m)} = 1^{m+1} + 2^{m+1} + 3^{m+1} + \dots + x^{m+1}$$

avremo

$$A' = r$$

$$A = \frac{r'}{2} + r \frac{r'}{2}$$

$$A'' = \frac{r''}{3} + r \frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r'}{2} \right) \frac{r}{3}$$

ed in generale

$$A^{(m+1)} = \frac{r^{(m)}}{m+1} + r \frac{r^{(m-1)}}{m+1} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r'}{2} \right) \frac{r^{(m-2)}}{m+1} + \text{ecc.}$$

come sopra (2). Quindi avremo

$$\nabla x = b^{-x(x-1):2} + r b^{-x(x-1):2-1} + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r'}{2} \right) b^{-x(x-1):2-2} + \text{ecc.}$$

e perciò farà (4)

$$Z^{(y, x)} = \phi \left(y - \frac{x(x-1)}{2} \right) + r \phi \left(y - \frac{x(x-1)}{2} - 1 \right) \\ + \left(\frac{r'}{2} + r \frac{r'}{2} \right) \phi \left(y - \frac{x(x-1)}{2} - 2 \right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x=0$, è chiaro che farà $r=r'=r''=\text{ecc.}=0$; dunque $Z^{(y, 0)} = \phi y$. Per trovare il valore di $Z^{(y, 0)}$, il quale non è dato dalla serie proposta, facciamo nella equazione del problema $x=1$, ed avremo $Z^{(y, 1)} = Z^{(y-1, 1)} + Z^{(y, 0)}$. Ora è facile il vedere, come nel Problema I., che farà $Z^{(y, 1)} = 0$ se y è zero o negativa. Quindi farà $Z^{(1, 0)} = Z^{(1, 1)} - Z^{(0, 1)} = 1$, $Z^{(2, 0)} = Z^{(2, 1)} - Z^{(1, 1)} = 0$, e così tutti gli altri valori di $Z^{(y, 0)} = 0$, fuorchè il solo $Z^{(1, 0)}$. Dunque la ricercata funzione $Z^{(y, x)} = a$ quel termine che nella serie è coefficiente di $\phi 1$. Sia $m+2$ il posto che occupa nella serie questo termine, cioè sia $A^{(m+1)}$ il coefficiente di $\phi . 1$, ed avremo $y - \frac{x(x-1)}{2} - m - 1 = 1$, cioè

$$m+1 = y - \frac{x(x-1)}{2} - 1. \text{ Se adesso esprimiamo col segno}$$

Sx^m la somma della serie $1 + 2^m + 3^m + \dots + x^m$, farà il termine generale cercato

$$Z^{(y, x)} = \frac{Sx^{y-x(x-1):2-1}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + Sx \cdot \frac{Sx^{y-x(x-1):2-2}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + \left(\frac{Sx^2}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + Sx \cdot \frac{Sx}{2} \Big) \frac{Sx^{y-N(x-1):2-3}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + \left(\frac{Sx^3}{3} + Sx \cdot \frac{Sx^2}{3} + \left(\frac{Sx^2}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + Sx \cdot \frac{Sx}{2} \right) \frac{Sx}{3} \right) \frac{Sx^{y-N(x-1):2-4}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

nella quale espressione il coefficiente del termine $(m+1)^{\text{esimo}}$ si trova ponendo ne' termini precedenti $y - \frac{x(x-1)}{2} - 1 = m$.

Supponghiamo per esempio che si voglia sapere, qual termine corrisponda ad $x=3$, $y=8$, cioè il valore di $Z^{(8,3)}$; avremo

$$\begin{aligned}
 Z^{(8,3)} &= \frac{Sx^4}{4} + Sx \cdot \frac{Sx^3}{4} + \left(\frac{Sx^2}{2} + Sx \cdot \frac{Sx}{2} \right) \frac{Sx^2}{4} + \left(\frac{Sx^3}{3} \right. \\
 & \left. + Sx \cdot \frac{Sx^2}{3} + \left(\frac{Sx^2}{2} + Sx \cdot \frac{Sx}{2} \right) \frac{Sx}{3} \right) \frac{Sx}{4} = \frac{98}{4} + \frac{6 \cdot 36}{4} \\
 & + (7+18) \frac{14}{4} + (12+2 \cdot 14 + (7+18)2) \frac{6}{4} \\
 & = \frac{1204}{4} = 301 \text{ come nella figura.}
 \end{aligned}$$

PROBLEMA III.

10. Trovare il termine generale della serie

	1	2	3	4	5	6	7....y
1	1	2	4	8	16	32	64
2	1	5	16	44	112	272	640
3	1	9	45	171	558	1656	4610
4	1	14	103	540	2295	8478	29379....
⋮							
x							

La legge, che osservano tra di loro i termini di questa serie, è espressa dall'equazione

$$\begin{aligned}
 Z^{(y,x)} &= 2 Z^{(y-1,x)} + Z^{(y,x-1)} + (x-1) Z^{(y-1,x-1)} \\
 &+ \frac{(x-1)(x-2)}{2} Z^{(y-2,x-1)} + \dots + Z^{(y-x+1,x)}
 \end{aligned}$$

In

In questa equazione non solo sono variabili le differenze di y , ma è ancora variabile il numero de' termini. Facciamo $Z^{(x, x)} = b^x \nabla^x \alpha$, e sostituendo avremo

$$\alpha = 2b^{-1}\alpha + 1 + (x-1)b^{-1} + \frac{(x-1)(x-2)}{2} b^{-2} + \dots + b^{-x+1}$$

cioè $\alpha = \frac{(1+b^{-1})^{x-1}}{1-2b^{-1}}$, e $\nabla^x \alpha = \frac{(1+b^{-1})^{x(x-1):2}}{(1-2b^{-1})^x}$. Sia

$$\frac{(1+b^{-1})^{x(x-1):2}}{(1-2b^{-1})^x} = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

e differenziando logicamente avremo

$$\frac{x(x-1)}{2(1+b^{-1})} + \frac{2x}{1-2b^{-1}} = \frac{A' + 2A'b^{-1} + 3A''b^{-2} + \text{ecc.}}{1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}}$$

Ma riducendo in serie il primo membro abbiamo

$$\frac{x(x-1)}{2(1+b^{-1})} + \frac{2x}{1-2b^{-1}} = \frac{x(x-1)}{2} (1 - b^{-1} + b^{-2} - b^{-3} + \text{ecc.}) + 2x(1 + 2b^{-1} + 4b^{-2} + 8b^{-3} + \text{ecc.})$$

$$= \frac{x(x+3)}{2} - \frac{x(x-9)}{2} b^{-1} + \frac{x(x+15)}{2} b^{-2} - \frac{x(x-33)}{2} b^{-3} + \text{ecc.} \text{ Dunque } (2) \quad r = \frac{x(x+3)}{2},$$

$$r' = -\frac{x(x-9)}{2}, \quad r'' = \frac{x(x+15)}{2}, \text{ e generalmente}$$

$$r^{(m)} = \pm \frac{x(x \pm 2^{m+2} - 1)}{2}, \text{ ove il segno superiore vale nel caso di } m \text{ pari, l' inferiore nel caso di } m \text{ dispari. Quindi avremo}$$

$$A' = \frac{x(x+3)}{2}$$

$$A'' = -\frac{x(x-9)}{2} + \frac{x(x+3)}{2} \cdot \frac{x(x+3)}{2 \cdot 2}$$

e in generale

$$A^{(m-1)} = \pm \frac{x(x \pm 2^m - 1)}{2(m-1)} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \cdot \mp \frac{x(x \mp 2^{m-1} - 1)}{2(m-1)}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(- \frac{x(x-2^2-1)}{2 \cdot 2} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \cdot \frac{x(x+2^2-1)}{2 \cdot 2} \right) \\
& \pm \frac{x(x \pm 2^{m-2}-1)}{2(m-1)} + \left(\frac{x(x+2^4-1)}{2 \cdot 3} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \right. \\
& \cdot \left. - \frac{x(x-2^3-1)}{2 \cdot 3} + \left(- \frac{x(x-2^3-1)}{2 \cdot 2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \cdot \frac{x(x+2^2-1)}{2 \cdot 2} \right) \frac{x(x+2^2-1)}{2 \cdot 3} \right) \\
& \mp \frac{x(x \mp 2^{m-3}-1)}{2(m-1)} + \text{ecc.}
\end{aligned}$$

Determinate in questa maniera le quantità A' , A'' , ecc., avremo

$Z^{(j,*)} = \phi y + A' \phi(y-1) + A'' \phi(y-2) + A''' \phi(y-3) + \text{ecc.}$
 Facendo $x=0$, abbiamo $A' = A'' = \text{ecc.} = 0$; dunque $\phi y = Z^{(j,0)}$. Per trovare il valore di questa funzione, ponghiamo nella equazione del problema $y=1, 2, 3, \text{ecc.}$; $x=2, 3, \text{ecc.}$; ed avremo

$$\begin{aligned}
Z^{(1,2)} &= 2Z^{(0,2)} + Z^{(1,1)} + Z^{(0,1)} \\
Z^{(2,3)} &= 2Z^{(1,3)} + Z^{(2,2)} + 2Z^{(1,2)} + Z^{(0,2)} \\
&\text{ecc.}
\end{aligned}$$

Quindi $Z^{(0,1)} = -2Z^{(0,2)}$, e $Z^{(0,2)} = 0$, e così in generale $Z^{(0,*)} = 0$. Adesso facendo $y=0, 1, \text{ecc.}$; $x=2, 3, \text{ecc.}$ sarà

$$\begin{aligned}
Z^{(0,2)} &= 2Z^{(-1,2)} + Z^{(0,1)} + Z^{(-1,1)} \\
Z^{(1,3)} &= 2Z^{(0,3)} + Z^{(1,2)} + 2Z^{(0,2)} + Z^{(-1,2)} \\
&\text{ecc.}
\end{aligned}$$

e perciò $Z^{(-1,1)} = -2Z^{(-1,2)}$, $Z^{(-1,2)} = 0$, e generalmente $Z^{(-1,*)} = 0$. Nell' istessa maniera si vedrà, che $Z^{(j,1)}$ e sempre $= 0$ nel caso di y negativa. Ponghiamo adesso nella equazione proposta $x=1$, ed avremo $Z^{(j,1)} = 2Z^{(j-1,1)} + Z^{(j,0)}$: dunque $Z^{(j,0)}$ è $= 1$ nel solo caso di $y=1$; negli altri casi $Z^{(j,0)} = 0$, e perciò $Z^{(j,*)}$ è $=$ al coefficiente di $\phi \cdot 1$. Sia $A^{(m-1)}$ questo coefficiente, avremo $y-m+1=1$, cioè $m=y$. Quindi sarà

$$Z^{(j,*)} = \pm \frac{x(x \pm 2^y - 1)}{2(y-1)} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \mp \frac{x(x \mp 2^{y-1} - 1)}{2(y-1)}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(- \frac{x(x-2^3-1)}{2.2} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \cdot \frac{x(x+2^2-1)}{2.2} \right) \\
& \pm \frac{x(x \pm 2^{y-2}-1)}{2(y-1)} + \left(\frac{x(x+2^4-1)}{2.3} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \right. \\
& \cdot \frac{x(x-2^3-1)}{2.3} + \left(- \frac{x(x-2^3-1)}{2.2} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \right. \\
& \cdot \frac{x(x+2^2-1)}{2.2} \left. \right) \frac{x(x+2^2-1)}{2.3} \left. \right) \mp \frac{x(x \mp 2^{y-3}-1)}{2(y-1)} + \text{ecc.}
\end{aligned}$$

Di questa serie si devono prender $y-1$ termini; la serie poi è tale, che si ottiene il coefficiente del secondo termine facendo nel primo $y=2$, il coefficiente del terzo facendo nel primo e nel secondo $y=3$, ecc. Il segno superiore si prende se y è pari, l'inferiore se y è dispari.

Cerchiamo per esempio il termine quinto della quarta fila, cioè quello che corrisponde ad $y=5$, $x=4$; avremo

$$\begin{aligned}
Z^{(5,4)} &= \frac{29}{2} + \frac{14.19}{2} + (5 + 14.7) \frac{5}{2} + \left(\frac{38}{3} + \frac{14.10}{3} \right. \\
&\quad \left. + (5 + 14.7) \frac{14}{3} \right) \frac{7}{2} = 2295.
\end{aligned}$$

ARTICOLO II.

Riflessioni intorno ai metodi dei Signori de la Grange e de la Place per integrare l'equazioni a differenze finite e parziali.

II. In questo articolo io mi son proposto di mostrare qual rapporto abbia il mio metodo con quello del Sig. *de la Grange*, il quale me ne ha fatta nascere l'idea; come ancora di far vedere, che il metodo del Sig. *de la Place* può applicarsi felicemente a quella specie di equazioni, che abbiamo nell'articolo precedente considerate. Si abbia adunque l'equazione

$$\begin{aligned}
& Z^{(y,*)} = AZ^{(y-1,*)} + BZ^{(y-2,*)} + CZ^{(y-3,*)} + \dots + MZ^{(y-n,*)} \\
& + A'Z^{(y,*)-1} + B'Z^{(y-1,*)-1} + C'Z^{(y-2,*)-1} + \dots \\
& + M'Z^{(y-n,*)-1}
\end{aligned}$$

Supponghiamo $Z^{(y,*)} = b^y \cdot x$, ove ϕx esprime una funzione

Iiiii ij

di x , b è una quantità costante. Sostituito questo valore avremo dividendo per b^y

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - Cb^{-3} - \dots - Mb^{-n}) \phi x \\ = (A' + B'b^{-1} + C'b^{-2} + \dots + M'b^{-n}) \phi(x-1).$$

Questa è una equazione a differenze ordinarie, l'integrazione della quale ci darà il valore di ϕx . Ora se A , B , ecc. A' , B' , ecc. sono quantità costanti, ed n similmente è costante, farà $\phi.x = x^*$, e per determinare la quantità costante α avremo l'equazione

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - \dots - Mb^{-n}) \alpha = A' + B'b^{-1} + C'b^{-2} + \dots + M'b^{-n}.$$

Questo è il caso, che considera il Sig. *de la Grange*, e da ciò che abbiamo detto apparisce l'origine della sostituzione che egli adopra, cioè $Z^{(y,*)} = m x^* b^y$.

12. Ma se n è una funzione di x , come nel nostro caso, allora o siano o non siano costanti le quantità A, B , ecc. A', B' , ecc. siccome i coefficienti della equazione precedente sono variabili, farà com'è noto $\phi x = \nabla x$, essendo α

una funzione di x , per determinar la quale avremo l'equazione

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - \dots - Mb^{-n}) \alpha = A' + B'b^{-1} + \dots + M'b^{-n}.$$

Ed ecco l'origine di quella sostituzione, che abbiamo usata di sopra, cioè $Z^{(y,*)} = m b^y \nabla x$.

13. Se poi farà n costante, ma le quantità A, B , ecc. faranno funzioni di x , avremo di nuovo $\phi.x = \nabla x$, e la

nostra sostituzione condurrà felicemente alla integrazione dell'equazioni a differenze finite e parziali e a coefficienti variabili. Convien però intendere dell'equazioni simili nella forma a quella del n°. 11, nella quale la variabile x in ciascun termine non varia che di una unità. Perchè per l'equazioni de' gradi superiori, $\phi.x$ farebbe data da una equazione a differenze ordinarie de' gradi superiori, la quale com'è noto non si integrarà, che in alcuni casi particolari. Ma con ulteriori artifizj si potrà anche superare questa difficoltà, e partendo dalla supposizione, $Z^{(y,*)} = b^y \phi x$ giungere

alla integrazione generale di quest' equazioni . Noi ci riserviamo un' altra volta a continuare queste riflessioni , perchè l' integrazione di quell' equazioni , che abbiamo nell' articolo primo considerate , ci basta per l' oggetto principale , il quale ci siamo proposto in queste ricerche , cioè per risolvere i problemi relativi alla *partizione de' numeri* . Solo avvertiremo , che queste poche osservazioni sembra che diano intanto una maggior generalità all' elegantissimo metodo del Sig. *de la Grange* .

14. Il metodo del Sig. *de la Place* può applicarsi a quell' equazioni , che abbiamo di sopra trattate . Si abbia per esempio l' equazione

$$(a) \quad Z^{(y, x)} = A \underset{x}{Z^{(y-1, x)}} + B \underset{x}{Z^{(y-x, x-1)}}$$

e quello che diremo di questa equazione potrà a qualunque altra applicarsi . Eliminiamo da questa equazione il termine $Z^{(y-x, x-1)}$, e siccome abbiamo

$$B \underset{x}{Z^{(y-x, x-1)}} = B \underset{x}{A} \underset{x-1}{Z^{(y-x-1, x-1)}} + B \underset{x}{B} \underset{x-1}{Z^{(y-2x+1, x-2)}}$$

sostituendo avremo

$$\begin{aligned} Z^{(y, x)} - A \underset{x}{Z^{(y-1, x)}} &= B \underset{x}{B} \underset{x-1}{Z^{(y-2x+1, x-2)}} \\ (b) \quad - A \underset{x-1}{(Z^{(y-1, x)} - A \underset{x}{Z^{(y-2, x)}})} \end{aligned}$$

Si offervi , che se il secondo membro di questa equazione fosse $= 0$, il primo rappresenterebbe una equazione a differenze ordinarie ; onde ponendo $Z^{(y, x)} = f^y$, e dividendo per f^y

$$\text{si avrebbe } 1 - \frac{A}{f} - \frac{A}{f} \left(1 - \frac{A}{f}\right) = \left(1 - \frac{A}{f}\right) \left(1 - \frac{A}{f}\right) = 0,$$

cioè farebbe $f = A$, $f = A \underset{x-1}$, e $Z^{(y, x)} = m A^y + m' A^y \underset{x-1}$,

ove m ed m' sono funzioni di x , perchè x si è supposta costante .

Eliminiamo adesso dalla equazione (b) il termine $Z^{(y-2x+1, x-2)}$, e siccome abbiamo dalla equazione (a)

$$B \underset{x}{B} \underset{x-1}{Z^{(y-2x+1, x-2)}} = B \underset{x}{B} \underset{x-1}{A} \underset{x-2}{Z^{(y-2x, x-2)}}$$

$$806 \quad \text{S U L L' E Q U A Z I O N I} \\ \vdash B \cdot B \cdot B \cdot Z^{(y-3x+2, x-3)}$$

fossituendo avremo

$$\begin{aligned} Z^{(y, x)} &= A \cdot Z^{(y-1, x)} = B \cdot B \cdot B \cdot Z^{(y-3x+2, x-3)} \\ (c) \quad &= A \cdot (Z^{(y-1, x)} - A \cdot Z^{(y-2, x)}) \\ &= A \cdot (Z^{(y-1, x)} - A \cdot Z^{(y-2, x)} - A \cdot (Z^{(y-2, x)} - A \cdot Z^{(y-3, x)})) \end{aligned}$$

Qui pure, se il secondo membro fosse $= 0$, avremmo fofituendo nel primo f^y in luogo di $Z^{(y, x)}$, avremmo io dico

$$\begin{aligned} &A \cdot A \cdot A \\ (1 - \frac{A}{f}) (1 - \frac{A}{f}) (1 - \frac{A}{f}) &= 0; \text{ dunque farebbe} \\ Z^{(y, x)} &= m \cdot A^y + m' \cdot A^{y-1} + m'' \cdot A^{y-2} \end{aligned}$$

Seguitando ad eliminare nella ifteffa maniera, troveremo finalmente

$$\begin{aligned} Z^{(y, x)} &= A \cdot Z^{(y-1, x)} = B \cdot B \cdot \dots \cdot B \cdot Z^{(y-\text{ecc.}, 1)} \\ &= A \cdot (Z^{(y-1, x)} - A \cdot Z^{(y-2, x)}) \end{aligned}$$

—ecc.

e foftituendo nel primo membro f^y in luogo di $Z^{(y, x)}$, e dividendo per f^y , effo diventerà

$$(1 - \frac{A}{f}) (1 - \frac{A}{f}) (1 - \frac{A}{f}) \dots (1 - \frac{A}{f}) \cdot \text{Ora fup-}$$

pongiamo che la funzione $Z^{(y, 1)}$ fia data dalla equazione $Z^{(y, 1)} = C Z^{(y-1, 1)}$ ed avremo dopo di aver fatto le foftituzio-

$$\text{ni opportune } (1 - \frac{A}{f}) (1 - \frac{A}{f}) (1 - \frac{A}{f}) \dots$$

$$(1 - \frac{A}{f}) = \frac{C}{f} (1 - \frac{A}{f}) \dots (1 - \frac{A}{f}), \text{ cioè } (1 - \frac{C}{f})$$

$A_2 \quad A_3 \quad A_x$
 $(1 - \frac{A_2}{f})(1 - \frac{A_3}{f}) \dots (1 - \frac{A_x}{f}) = 0$. Dunque $f = C$,
 $= A_2, = A_3, \dots = A_x$, e l' integrale della equazione propo-
 sta $Z^{(y,*)} = mC + m'A_2 + \dots + m^{(*)}A_x$. Le quantità m ,

m' ecc. sono funzioni di x , per determinar le quali si sostituirà nella equazione proposta il valore trovato di $Z^{(y,*)}$.

15. E' chiaro che l' istesso può dirsi di qualunque equazione: cioè farà l' integrale di essa $Z^{(y,*)} = m f^y + m' f^y + m'' f^y + \dots$. Per trovare le quantità f, f', f'', \dots si prendano dall' equazione data quei termini, che sono funzioni di x , lasciando da parte quei che sono funzioni di $x-1$. Si ponga in quelli $Z^{(y,*)} = f^y$, e dividendo per f^y si faccia x successivamente $= 1, 2, 3, \dots, x$; dalle quantità che ne nasceranno uguagliate a zero si prendano i valori di f , che saranno i ricercati valori di f, f', f'', \dots . Le funzioni m, m', m'', \dots ecc. si determineranno sostituendo l' integrale trovato nella equazione data. Ho supposto che nella equazione proposta non vi siano che le funzioni di x , e di $x-1$: ma il metodo è generale per qualunque caso. Si veda la Memoria del Sig. *de la Place*

16. Per applicare questo metodo a qualche caso particolare, prendiamo ad integrare l' equazione del n°. 6, dove abbiamo $Z^{(y,*)} = Z^{(y-1,*)}$, e

$$Z^{(y,*)} = Z^{(y-1,*)} + Z^{(y-x+2,*)}$$

Ne' due termini $Z^{(y,*)} - Z^{(y-1,*)}$ facciamo $Z^{(y,*)} = f^{y-1}$, e dividendo per f^{y-1} avremo $1 - \frac{1}{f}$; sostituiamo in questa

quantità $1, 2, 3, \dots, x$ in luogo di x , ed avremo $(1 - \frac{1}{f})^x$ per determinare f . Questa equazione dà x valori di f uguali all' unità; dunque l' integrale farà della forma

$$Z^{(y,*)} = A \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-x+1)}{1.2\dots(x-1)} + B \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-x+2)}{1.2\dots(x-2)}$$

$+ C \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-x+3)}{1.2\dots(x-3)} + \text{ecc.}$ (Si vedano le Memorie de' Signori *de la Place* e *de la Grange*).

Per determinare le funzioni A , B , ecc. sostituiamo il valore di $Z^{(y, x)}$ nella equazione data, ed avremo

$$\begin{aligned} & A \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-x+1)}{1.2\dots(x-1)} + B \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-x+2)}{1.2\dots(x-2)} \\ & + C \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-x+3)}{1.2\dots(x-3)} + \text{ecc.} \\ & = A \frac{(y-2)(y-3)\dots(y-x)}{1.2\dots(x-1)} + B \frac{(y-2)(y-3)\dots(y-x+1)}{1.2\dots(x-2)} \\ & + C \frac{(y-2)(y-3)\dots(y-x+2)}{1.2\dots(x-3)} + \text{ecc.} \\ & + A \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+4)}{1\dots(x-2)} + B \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+5)}{1\dots(x-3)} \\ & + C \frac{(y-x+1)\dots(y-2x+6)}{1\dots(x-4)} + \text{ecc.} \text{ Ma è evidente che} \\ & \frac{(y-1)\dots(y-x+1)}{1\dots(x-1)} = \frac{(y-2)\dots(y-x)}{1\dots(x-1)} + \frac{(y-2)\dots(y-x+1)}{1\dots(x-2)}, \\ & \text{così pure } \frac{(y-1)\dots(y-x+2)}{1\dots(x-2)} = \frac{(y-2)\dots(y-x+1)}{1\dots(x-2)} \\ & + \frac{(y-2)\dots(y-x+2)}{1\dots(x-3)}; \text{ ecc. Dunque sostituendo questi va-} \\ & \text{lori avremo} \\ & A \frac{(y-2)\dots(y-x+1)}{1\dots(x-2)} + B \frac{(y-2)\dots(y-x+2)}{1\dots(x-3)} \\ & + C \frac{(y-2)\dots(y-x+3)}{1\dots(x-4)} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

$$= A_{x-1}$$

$$= A_{n-1} \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+4)}{1 \dots (x-2)} + B_{n-1} \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+5)}{1 \dots (x-3)} \\ + C_{n-1} \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+6)}{1 \dots (x-4)} + \text{ecc.}$$

Ora è facile il vedere che

$$\frac{(y-2) \dots (y-x+1)}{1 \dots (x-2)} = \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+4)}{1 \dots (x-2)} \\ + (x-3) \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+5)}{1 \dots (x-3)} \\ + \frac{(x-3)(x-4)}{2} \cdot \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+6)}{1 \dots (x-4)} \\ + \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+7)}{1 \dots (x-5)} + \text{ecc.}$$

$$\text{Similmente } \frac{(y-2) \dots (y-x+2)}{1 \dots (x-3)} = \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+5)}{1 \dots (x-3)} \\ + (x-3) \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+6)}{1 \dots (x-4)} \\ + \frac{(x-3)(x-4)}{2} \cdot \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+7)}{1 \dots (x-5)} + \text{ecc. ; e}$$

così in seguito. Sostituendo tutti questi valori avremo

$$A_n \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+4)}{1 \dots (x-2)} + (x-3) A_n \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+5)}{1 \dots (x-3)} \\ + \frac{(x-3)(x-4)}{2} A_n \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+6)}{1 \dots (x-4)} + \text{ecc.} \\ + B_n \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+5)}{1 \dots (x-3)} + (x-3) B_n \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+6)}{1 \dots (x-4)} + \text{ecc.} \\ + C_n \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+6)}{1 \dots (x-4)} + \text{ecc.}$$

$$= A_{n-1} \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+4)}{1 \dots (x-2)} + B_{n-1} \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+5)}{1 \dots (x-3)}$$

$$+ C \frac{(y-x+1) \dots (y-2x+6)}{1 \dots (x-4)} + \text{ecc.} \text{ Quindi farà}$$

$$A - A_{x-1} = 0, B - B_{x-1} = -(x-3)A,$$

$$C - C_{x-1} = -\frac{(x-3)(x-4)}{2} A - (x-3)B,$$

$$D - D_{x-1} = -\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2 \cdot 3} A$$

$$- \frac{(x-3)(x-4)}{2} B - (x-3)C; \text{ ecc.} \text{ Convien dun-}$$

que integrare quest' equazioni; ora si offervi che la prima non comincia ad aver luogo, che quando x è maggiore di 1; la seconda non ha luogo che quando x è maggiore di 2, e così delle altre. Posto questo la prima equazione ci dà $A = \text{Cost.}$ Per determinar questa costante facciamo $x=1$,

ed avremo $Z^{(y,1)} = A = \text{Cost.}$; ma ponendo $y=1$ abbiamo

$Z^{(1,1)} = 1$; dunque $A = 1$. La seconda equazione

$$B - B_{x-1} = -(x-3) \text{ integrata ci dà}$$

$$B = -\frac{(x-3)(x-2)}{2} + \text{Cost.} \text{ Per determinar la costante}$$

facciamo nell' integrale $x=2$, ed avremo

$Z^{(y,2)} = y-1 + \text{Cost.}$; e ponendo $y=1$, abbiamo

$$Z^{(1,2)} = 1 = 1-1 + \text{Cost.}; \text{ dunque } B = 1 - \frac{(x-3)(x-2)}{2}.$$

$$\text{Nell' istesso modo troveremo } C = \frac{(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{2 \cdot 4},$$

e così delle altre.

Ma siccome non si vede bastantemente la legge, che osservano tra di loro le funzioni A, B, C , ecc. cerchiamo

un' altra maniera di esprimere l' integrale dell' equazione data. Questo integrale può essere ancora della forma seguente

$$Z^{(y, x)} = A \frac{(y-X)(y-X-1) \dots (y-X-x+2)}{1 \quad . \quad 2 \dots \dots \dots (x-1)} \\ + B \frac{(y-X)(y-X-1) \dots (y-X-x+3)}{1 \quad . \quad 2 \dots \dots \dots (x-2)} + \text{ecc.}$$

ove X è una funzione di x , che determineremo in appresso. Si sostituiscia nella equazione data questo valore di $Z^{(y, x)}$, e si avrà

$$A \frac{(y-X)(y-X-1) \dots (y-X-x+2)}{1 \quad . \quad 2 \dots \dots \dots (x-1)} \\ + B \frac{(y-X)(y-X-1) \dots (y-X-x+3)}{1 \quad . \quad 2 \dots \dots \dots (x-2)} + \text{ecc.} \\ = A \frac{(y-X-1)(y-X-2) \dots (y-X-x+1)}{1 \quad . \quad 2 \dots \dots \dots (x-1)} \\ + B \frac{(y-X-1)(y-X-2) \dots (y-X-x+2)}{1 \quad . \quad 2 \dots \dots \dots (x-2)} + \text{ecc.} \\ + A \frac{(y-X-x+2) \dots (y-X'-2x+5)}{1 \dots \dots \dots (x-2)} \\ + B \frac{(y-X'-x+2) \dots (y-X'-2x+6)}{1 \dots \dots \dots (x-3)} + \text{ecc.}$$

ove X' è ciò che diventa X ponendovi $x-1$ in luogo di x . Ma abbiamo

$$\frac{(y-X) \dots (y-X-x+2)}{1 \dots \dots (x-1)} = \frac{(y-X-1) \dots (y-X-x+1)}{1 \dots \dots (x-1)} \\ + \frac{(y-X-1) \dots (y-X-x+2)}{1 \dots \dots (x-2)}, \frac{(y-X) \dots (y-X-x+3)}{1 \dots \dots (x-2)} \\ = \frac{(y-X-1) \dots (y-X-x+2)}{1 \dots \dots (x-2)} + \frac{(y-X-1) \dots (y-X-x+3)}{1 \dots \dots (x-3)}, \\ \text{ecc.}$$

Dunque sostituendo questi valori farà

Kkkkk ij

$$\begin{aligned}
 & A \frac{(y-X-1) \dots (y-X-x+2)}{1 \dots (x-2)} + B \frac{(y-X-1) \dots (y-X-x+3)}{1 \dots (x-3)} \\
 & + C \frac{(y-X-1) \dots (y-X-x+4)}{1 \dots (x-4)} + \text{ecc.} \\
 & = A \frac{(y-X'-x+2) \dots (y-X'-2x+5)}{1 \dots (x-2)} \\
 & + B \frac{(y-X'-x+2) \dots (y-X'-2x+6)}{1 \dots (x-3)} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

Siccome X è una funzione indeterminata, determiniamola in modo, che sia $y-X-1=y-X'-x+2$, cioè $X-X'=x-3$, e integrando farà $X=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$.

Adesso paragonando i termini omologi avremo $A=A_{x-1}$,

$B=B_{x-1}$, $C=C_{x-1}$, ecc. dunque tutte le funzioni A ,

B , ecc. sono in questo caso quantità costanti. Per determi-

nare il valore di queste costanti, le quali chiameremo rispettivamente A , B , C , ecc. supponghiamo in primo luogo

$x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=A$, e nel caso di $y=1$ essendo $Z^{(1,1)}=1$, farà $A=1$. Sia adesso $x=2$, e farà

$Z^{(0,2)}=y+B$; ma facendo $y=1$ abbiamo

$Z^{(1,2)}=1=1+B$; dunque $B=0$. Sia $x=3$, farà

$Z^{(y,3)}=\frac{y(y-1)}{2}+C$, e quindi $Z^{(1,3)}=0=C$. Nella me-

desima maniera si troveranno le altre costanti D , E , ecc. uguali a zero. Dunque l'integrale della equazione proposta farà così espresso:

$$Z^{(y,x)} = \frac{\left(y - \frac{(x-2)(x-3)}{2}\right) \left(y - \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 1\right) \dots \left(y - \frac{(x-2)(x-3)}{2} - x + 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (x-1)}$$

la qual formola, quantunque di una forma diversa, coincide però con le altre trovate di sopra (6, 7, 8).

17. Cerchiamo adesso l'integrazione dell'equazione trattata al n.º 9; cioè la seguente

$$Z^{(j, x)} = xZ^{(j-1, x)} + Z^{(j-x+1, x-1)}$$

per la quale si ha $Z^{(j, 1)} = Z^{(j-1, 1)}$. Ponendo ne' due ter-

mini $Z^{(j, x)} = xZ^{(j-1, x)}$ la quantità f^{j-x} in luogo di $Z^{(j, x)}$, e dividendo per f^{j-x} avremo $1 - \frac{x}{f}$, e $\nabla(1 - \frac{x}{f})$

$= (1 - \frac{1}{f})(1 - \frac{2}{f})(1 - \frac{3}{f}) \dots (1 - \frac{x}{f})$. Questa quantità posta $= 0$ ci darà per f i valori $1, 2, 3, \dots x$. Dunque l'integrale cercato farà della forma

$$Z^{(j, x)} = A_x + B_x 2^{j-x} + C_x 3^{j-x} + D_x 4^{j-x} + \text{ecc.}$$

Sostituendo questo valore nella equazione proposta, essa diventerà

$$\begin{aligned} & A_x + B_x 2^{j-x} + C_x 3^{j-x} + D_x 4^{j-x} + \text{ecc.} \\ &= xA_x + xB_x 2^{j-x-1} + xC_x 3^{j-x-1} + xD_x 4^{j-x-1} + \text{ecc.} \\ &+ A_{x-1} + B_{x-1} 2^{j-x-x'+1} + C_{x-1} 3^{j-x-x'+1} \\ &+ D_{x-1} 4^{j-x-x'+1} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} & (1-x)A_x + (2-x)B_x 2^{j-x-1} + (3-x)C_x 3^{j-x-1} + \text{ecc.} \\ &= A_{x-1} + B_{x-1} 2^{j-x-x'+1} + C_{x-1} 3^{j-x-x'+1} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Per determinare X , facciamo $j-X-1 = j-x-X'+1$, cioè $X-X' = x-2$, e integrando avremo $X = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$.

Adeffo paragonando i termini omologi avremo l'equazioni;

Kkkkkk iij

814 S U L L' E Q U A Z I O N I
 $(1-x) A = A_{x-1}, (2-x) B = B_{x-1}, (3-x) C = C_{x-1}, \text{ecc.}$

Sia A il valore di A_x , quando $x=1$, e dall'equazione

$$-1.A_x = \frac{-1.A_{x-1}}{x-1} \text{ avremo } A_2 = \frac{-1.A_1}{1}, A_3 = \frac{-1.A_2}{2} \\ = \frac{(-1)^2 A_1}{1.2}; \text{ così } A_4 = \frac{(-1)^3 A_1}{1.2.3}, \text{ e generalmente}$$

$$A_x = \frac{(-1)^{x-1} . A_1}{1.2.3...(x-1)}. \text{ Sia } B \text{ il valore di } B_x \text{ quando } x=2, \text{ e}$$

$$-1.B_x = \frac{-1.B_{x-1}}{x-2} \text{ ci darà } B_3 = \frac{-1.B_2}{1},$$

$$B_4 = \frac{-1.B_3}{2} = \frac{(-1)^2 . B_2}{1.2}, B_5 = \frac{(-1)^3 B_2}{1.2.3}, \text{ ed in generale}$$

$$B_x = \frac{(-1)^{x-2} . B_2}{1.2.3...(x-2)}. \text{ Similmente si troverà}$$

$$C_x = \frac{(-1)^{x-3} . C_3}{1.2.3...(x-3)}, D_x = \frac{(-1)^{x-4} . D_4}{1.2.3...(x-4)}, \text{ ove } C=C_x \text{ posto}$$

$x=3$, e $D=D_x$ postovi $x=4$. Adesso per determinare le

costanti A, B, C , ecc. facciamo nell' integrale $x=1$, ed avremo $Z^{(y, 1)} = A$, e ponendo $y=1$, $A = Z^{(1, 1)} = 1$; onde

$$A_x = \frac{(-1)^{x-1}}{1.2.3...(x-1)}. \text{ Ponghiamo } x=2, \text{ ed avremo}$$

$$Z^{(y, 2)} = -1 + B_2 y, \text{ e facendo } y=2, Z^{(2, 2)} = 1 = -1 + 4B, \text{ cioè } B = \frac{1}{2}, \text{ e } B_x = \frac{(-1)^{x-2}}{2.1.2...(x-2)}. \text{ Posto } x=3,$$

$$\text{farà } Z^{(y, 3)} = \frac{1}{2} - \frac{1.2 y^{-2}}{1} + C_3 y^{-1}, \text{ e facendo } y=3,$$

$$Z^{(2,1)} = 0 = \frac{1}{2} - 2 + 9C, \text{ cioè } C = \frac{1}{2 \cdot 3}, \text{ e}$$

$$C = \frac{(-1)^{x-3}}{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \dots (x-3)}. \text{ Così si troverà}$$

$$D = \frac{(-1)^{x-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \dots (x-4)}, \text{ ecc. Dunque l' integrale cercato farà}$$

$$\begin{aligned} Z^{(y,x)} = & \frac{(-1)^{x-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-1)} + \frac{(-1)^{x-2}}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (x-2)} 2^{y-(x-1)(x-2):2} \\ & + \frac{(-1)^{x-3}}{2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \dots (x-3)} 3^{y-(x-1)(x-2):2} \\ & + \frac{(-1)^{x-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \dots (x-4)} 4^{y-(x-1)(x-2):2} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Sia per esempio $x=3$, $y=8$, ed avremo $Z^{(8,3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 2^7 + \frac{1}{6} 3^7 = \frac{1-128+729}{2} = \frac{602}{2} = 301$, il qual valore combina con quello che abbiamo trovato di sopra per mezzo dell' altra formola.

Sia $y=7$, $x=4$, cioè si cerchi il settimo termine nella quarta fila della ferie del n.º 9. Avremo

$$\begin{aligned} Z^{(7,4)} = & -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} 2^4 - \frac{1}{6} 3^4 + \frac{1}{24} 4^4 = -\frac{1}{6} + 4 - \frac{27}{2} + \frac{64}{6} \\ = & \frac{-1+24-81+64}{6} = 1, \text{ come appunto è nella ferie.} \end{aligned}$$

la ferie.

L' introdurre nell' integrale una funzione X da determinarli poi a piacere, come abbiamo fatto ne' due passati Problemi, può esser di molta utilità per determinare in varj casi più semplicemente le funzioni della variabile x , che entrano nell' integrale. La ragione poi della sostituzione $Z^{(y,x)}$

$= af^{y-x}$ invece di $Z^{(y,x)} = f^y$, è la seguente. Essendo $Z^{(y,x)} = af^y$ un integrale particolare di una equazione a dif-

ferenze finite, nella quale x è costante, farà a una funzione di x ; onde in luogo di a si potrà porre af^{-x} , ed allora si avrà $Z^{(y, n)} = af^{-x} f^y = af^{y-x}$.

ARTICOLO III.

Della partizione de' numeri.

18. I problemi della partizione de' numeri mi hanno condotto a quella specie di equazioni, delle quali ho cercato l'integrale nell'articolo I. Questi problemi sono stati trattati per la prima volta dal celebre Sig: *Eulero* nella sua *Introduzione all'analisi degl' Infiniti*, e ne' *Comentarj dell'Accademia di Pietroburgo*. Egli ha dedotto un metodo ingegnosissimo dalla evoluzione delle funzioni in serie, tanto più a ragione stimato dal suo Autore, perchè, com'ei dice nella *Prefazione* dell'Opera citata, sembravangli questi problemi senza il suo metodo affatto inaccessibili alle forze dell'anima. Niuno, che io sappia, ha in seguito fatte ulteriori ricerche in questa materia. Esaminando direttamente questi problemi, ho tentato di ridurli alla integrazione di una equazione a differenze finite e parziali; il qual metodo sembra la regia strada per risolvere tutt'i problemi, che in qualche modo dipendono dalla dottrina delle combinazioni. Quindi integrando quest'equazioni, le quali da principio mi presentarono non ordinarie difficoltà, son giunto in una maniera, che sembrami non affatto inelegante, ad una formola generale, che mi dà la soluzione cercata in tutt'i casi; la qual formola difficilmente rintracciar si potrebbe col metodo del Sig. *Eulero*. Questo io esporrò ne' seguenti problemi, i quali comprendono i diversi casi di partizione di numeri.

PROBLEMA

P R O B L E M A IV.

19. Trovare il numero delle maniere, nelle quali un numero qualunque y può esser la somma di x termini della serie naturale 1, 2, 3, 4, ecc., o uguali o disuguali tra loro.

Disponendo per ordine tutte le maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti o uguali o disuguali, ne nasceranno le seguenti serie.

$$\begin{aligned}
 y &= 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + (y - x + 1) \\
 &\quad \dots + 1 + 2 + (y - x) \\
 &\quad \dots + 3 + (y - x - 1) \\
 &\quad \text{ecc.} \\
 &\quad \dots + 1 + 2 + 2 + (y - x - 1) \\
 &\quad \dots + 3 + (y - x - 2) \\
 &\quad \text{ecc.} \\
 &\quad \dots + 1 + 3 + 3 + (y - x - 3) \\
 &\quad \dots + 4 + (y - x - 4) \\
 &\quad \text{ecc.}
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 2 + 2 + 2 + \dots + 2 + 2 + 2 + (y - 2x + 2) \\
 &\quad \dots + 2 + 3 + (y - 2x + 1) \\
 &\quad \dots + 2 + 4 + (y - 2x) \\
 &\quad \text{ecc.} \\
 &\quad \dots + 2 + 3 + 3 + (y - 2x) \\
 &\quad \dots + 4 + (y - 2x - 1) \\
 &\quad \text{ecc.} \\
 &\quad \dots + 2 + 4 + 4 + (y - 2x - 2) \\
 &\quad \dots + 5 + (y - 2x - 3) \\
 &\quad \text{ecc.}
 \end{aligned}
 \tag{b}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 3 + 3 + 3 + \dots + 3 + 3 + 3 + (y - 3x + 3) \\
 &\quad \dots + 4 + (y - 3x + 2) \\
 &\quad \dots + 5 + (y - 3x + 1) \\
 &\quad \text{ecc.} \\
 &\quad \dots + 3 + 4 + 4 + (y - 3x + 1) \\
 &\quad \dots + 5 + (y - 3x) \\
 &\quad \text{ecc.} \\
 &\quad \dots + 3 + 5 + 5 + (y - 3x - 1) \\
 &\quad \dots + 6 + (y - 3x - 2) \\
 &\quad \text{ecc.} \quad \text{ecc.}
 \end{aligned}
 \tag{c}$$

In tutte queste serie, che sono composte di x termini, tutti i numeri si devono combinare in tutte le maniere soddisfacenti, purchè il primo termine resti sempre l'istesso. Le lettere a, b, c , ecc. esprimono il numero delle serie corrispondenti, e quindi il numero delle maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti, è $= a + b + c + \text{ecc.}$ Ora è chiaro che a è il numero delle maniere, nelle quali il numero $y - 1$ può dividersi in $x - 1$ parti; le altre serie (b), (c), ecc. sono tali, che il valore di b, c , ecc. farà l'istesso, se ad esse sostituiamo le seguenti serie composte di x termini.

$$\begin{array}{l}
 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + (y - 2x + 1) \\
 \dots + 1 + 2 + (y - 2x) \\
 \dots + 3 + (y - 2x - 1) \\
 \text{ecc.} \qquad \qquad \qquad (b) \\
 \dots + 1 + 2 + 2 + (y - 2x - 1) \\
 \dots + 3 + (y - 2x - 2) \\
 \text{ecc.} \\
 \dots + 1 + 3 + 3 + (y - 2x - 3) \\
 \dots + 4 + (y - 2x - 4) \\
 \text{ecc.} \\
 2 + 2 + 2 + \dots + 2 + 2 + (y - 3x + 2) \\
 \dots + 3 + (y - 3x + 1) \\
 \dots + 4 + (y - 3x) \\
 \text{ecc.} \qquad \qquad \qquad (c) \\
 \dots + 2 + 3 + 3 + (y - 3x) \\
 \dots + 4 + (y - 3x - 1) \\
 \text{ecc.} \\
 \dots + 2 + 4 + 4 + (y - 3x - 2) \\
 \dots + 5 + (y - 3x - 3) \\
 \text{ecc.} \quad \text{ecc.}
 \end{array}$$

Ora è evidente, che queste seconde serie rappresentano le maniere, nelle quali il numero $y - x$ può dividersi in x parti; infatti ponendo nelle prime $y - x$ in luogo di y ne nascono le seconde; dunque il numero delle maniere, nelle quali può in x parti dividersi il numero $y - x$, è $= b + c + d + \text{ecc.}$ Posto questo, se $Z^{(y, x)}$ rappresenta il numero delle maniere, nelle quali può il numero y dividersi in x parti, avremo l'equazione

$$Z^{(j, x)} = Z^{(j-x, x)} + Z^{(j-1, x-1)}$$

l' integrazione della quale ci darà la soluzione del problema

Ponghiamo $Z^{(j, x)} = b^j \nabla^x$, e sostituendo avremo

$$\alpha_x = b^{-x} \alpha_x + b^{-1}, \text{ cioè } \alpha_x = \frac{b^{-1}}{1 - b^{-x}}, \text{ e}$$

$$\nabla^x = \frac{b^{-x}}{(1 - b^{-1})(1 - b^{-2}) \dots (1 - b^{-x})}. \text{ Quindi avremo in ge-}$$

nerale (2) $r^{(m)} =$ alle potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici dell' equazioni $b - 1 = 0$, $b^2 - 1 = 0$, $b^3 - 1 = 0$, $b^x - 1 = 0$. Ora le potenze delle radici di quest' equazioni sono espresse dalla Tavola seguente.

Potenze	1 ^e	2 ^e	3 ^e	4 ^e	5 ^e	6 ^e	ecc.
equazione 1 ^a	1	1	1	1	1	1	
2 ^a	0	2	0	2	0	2	
3 ^a	0	0	3	0	0	3	
4 ^a	0	0	0	4	0	0	
ecc.							

E' facile il vedere, che la somma delle potenze m^{esime} delle radici di tutte quest' equazioni potrà esprimersi dalla formola $m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \dots + \frac{m}{m}$, purchè da questa si rigettino tutt' i termini fratti, e quei che sono maggiori di x . Questa formola così intesa esprimiamola col segno $\delta.m$, ed avremo, qualunque sia la quantità m , $r^{(m)} = \delta(m+1)$. Quindi farà (2)

$$A' = \delta 1$$

$$A = \frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}$$

$$A'' = \frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2} \right) \frac{\delta 1}{3}$$

e in generale

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2} \right) \frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta(m-3)}{m} \\
 & + \left\{ \frac{\delta_4}{4} + \delta_1 \frac{\delta_3}{4} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_2}{4} + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta_1}{4} \right\} \frac{\delta(m-4)}{m} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

Trovati questi valori sarà

$$\nabla^x = b^{-x} + A'b^{-x-1} + A''b^{-x-2} + A'''b^{-x-3} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$Z^{(y, x)} = \phi(y-x) + A'\phi(y-x-1) + A''\phi(y-x-2) + \text{ecc.}$
 Facendo $x=1$, abbiamo $A' = A'' = A''' = \text{ecc.} = 1$: dunque
 $Z^{(y, 1)} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$
 e ponendo $y=1$ in luogo di y

$$Z^{(0-1, 1)} = \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$$

Quindi sarà $Z^{(y, 1)} - Z^{(y-1, 1)} = \phi(y-1)$. Ora dalla natura del problema si deduce $Z^{(y, 1)} = 1$ se y è positiva, e $Z^{(y, 1)} = 0$ se y è zero o negativa; dunque $Z^{(1, 1)} - Z^{(0, 1)} = 1 = \phi.0$, cioè $\phi.y = 1$ nel solo caso di $y=0$, negli altri casi è sempre $=0$. Avremo perciò $Z^{(y, x)} =$ al coefficiente di $\phi.0$, il quale se si suppone essere $A^{(m)}$ sarà $y-x-m=0$, cioè $m=y-x$, e quindi

$$\begin{aligned}
 Z^{(y, x)} &= \frac{\delta(y-x)}{y-x} + \delta_1 \frac{\delta(y-x-1)}{y-x} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta(y-x-2)}{y-x} \\
 &+ \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta(y-x-3)}{y-x} \\
 &+ \left\{ \frac{\delta_4}{4} + \delta_1 \frac{\delta_3}{4} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_2}{4} + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} \right. \right. \\
 &\left. \left. + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta_1}{4} \right\} \frac{\delta(y-x-4)}{y-x} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

Si debba per esempio trovare in quante maniere il numero 18 può dividersi in sedici parti; avremo $x=16$, $y=18$,

$$\delta(y-x) = \delta_2 = 2 + 1 = 3, \delta_1 = 1: \text{quindi } Z^{(18, 16)} = \frac{3}{2}$$

stituendo avremo $\alpha = b^{-x}\alpha + b^{-x}$, cioè $\alpha = \frac{b^{-x}}{1-b^{-x}}$, e

$$\nabla_x^\alpha = \frac{b^{-x(x+1):2}}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\dots(1-b^{-x})}. \text{ Dunque farà come nel}$$

Problema precedente $r^{(m)} = \delta(m+1)$, e

$$\begin{aligned} A^{(m)} = & \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2} \right) \frac{\delta(m-2)}{m} \\ & + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2} \right) \frac{\delta 1}{3} \right) \frac{\delta(m-3)}{m} \\ & + \left\{ \frac{\delta 4}{4} + \delta 1 \frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2} \right) \frac{\delta 2}{4} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2} \right) \frac{\delta 1}{3} \right) \frac{\delta 1}{4} \right\} \frac{\delta(m-4)}{m} + \text{ecc} \end{aligned}$$

ove $\delta m = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \dots + \frac{m}{m}$, lasciati da parte i termini fratti e quei che sono maggiori di x .

Trovati per la formola precedente i valori di A' , A'' , ecc. avremo

$$\nabla_x^\alpha = b^{-x(x+1):2} + A' b^{-x(x+1):2-1} + A'' b^{-x(x+1):2-2} + \text{ecc.}$$

e quindi (+)

$$\begin{aligned} Z^{(y,x)} = & \phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) + A'\phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right) \\ & + A''\phi\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Ponendo $x=1$ abbiamo

$$Z^{(y,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(y-1,1)} = \phi(y-2) + \phi(y-3) + \phi(y-4) + \text{ecc.}$$

Dunque $Z^{(y,1)} - Z^{(y-1,1)} = \phi(y-1)$. Ma per la natura del problema $Z^{(y,1)} = 1$ nel caso di y positiva, ed è $= 0$ nel caso di y zero o negativa; dunque $\phi.y$ farà $= 1$ nel solo caso di $y=0$, negli altri casi farà sempre $\phi.y = 0$. Sarà dunque $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi.y$, il quale se si pone

effere $A^{(m)}$, avremo $y - \frac{x(x+1)}{2} - m = 0$, cioè

$$m = y - \frac{x(x+1)}{2}, \text{ e quindi}$$

$$\begin{aligned} Z^{(y, x)} = & \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} + \delta_1 \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} \\ & + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} \\ & + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta_1}{3}\right) \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 2\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} \\ & + \left\{ \frac{\delta_4}{4} + \delta_1 \frac{\delta_3}{4} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta_2}{4} + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3}\right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta_1}{3}\right) \frac{\delta_1}{4} \right\} \frac{\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 3\right)}{y - \frac{x(x+1)}{2}} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Cerchiamo per esempio in quante maniere il numero 18 può dividersi in 5 parti disuguali; avremo $x = 5$, $y = 18$, $\delta\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) = \delta_3 = 4$, $\delta_2 = 3$, $\delta_1 = 1$; e quindi il numero delle maniere cercato

$$Z^{(18, 5)} = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3} = 3.$$

Sia adesso $x = 4$, $y = 15$, cioè cerchiamo in quante maniere può il 15 dividersi in 4 parti disuguali. Sarà

$$\begin{aligned}
 d\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) &= d_5 = 1, \quad d_4 = 4 + 2 + 1 = 7, \quad d_3 = 3 \\
 &+ 1 = 4, \quad d_2 = 2 + 1 = 3, \quad d_1 = 1, \text{ e quindi} \\
 Z^{(15, 4)} &= \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{4}{5} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5} \\
 &+ \left\{ \frac{7}{4} + \frac{4}{4} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{3}{4} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4} \right\} \frac{1}{5} \\
 &= \frac{8 + 8 + 9 + 5}{5} = 6.
 \end{aligned}$$

21. Se nella formola del Problema precedente si pone $y - \frac{x(x-1)}{2}$ in luogo di y , ne nascerà l'espressione di questo. Dunque il numero y può dividersi in tante maniere in parti tutte disuguali, in quante maniere nel medesimo numero di parti o uguali o disuguali può dividersi il numero $y - \frac{x(x-1)}{2}$.

PROBLEMA VI.

22. Trovare il numero delle maniere, nelle quali il numero y può esser la somma di x termini della serie de' numeri dispari 1, 3, 5, 7, ecc. uguali tra loro o disuguali.

Facendo $Z^{(y, x)} =$ al cercato numero delle maniere, avremo l'equazione

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y-2x, x)} + Z^{(y-1, x-1)}.$$

Posto $Z^{(y, x)} = b^y \nabla \alpha$ avremo sostituendo $\alpha = \alpha b^{-2x} + b^{-1}$,

$$\text{cioè } \alpha = \frac{b^{-1}}{1 - b^{-2x}}, \text{ e } \nabla \alpha = \frac{b^{-x}}{(1 - b^{-2})(1 - b^{-4}) \dots (1 - b^{-2x})}.$$

Facciamo $\frac{1}{(1 - b^{-2})(1 - b^{-4}) \dots (1 - b^{-2x})} = 1 + A'b^{-2} + A''b^{-4} + A'''b^{-6} + \text{ecc.}$ e farà (2) $r = d_1$, $r' = d_2$, e generalmente $r^{(m)} = d(m+1)$. Onde qualunque sia il numero m , avremo sempre

$$A^{(m)}$$

$$A^{(m)} = \frac{\delta^1 m}{m} + \delta_1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta^2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta(m-2)}{m} \\ + \left(\frac{\delta^3}{3} + \delta_1 \frac{\delta^2}{3} + \left(\frac{\delta^2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Sarà dunque

$$\nabla_x = b^{-x} + A'b^{-x-2} + A''b^{-x-4} + A'''b^{-x-6} + \text{ecc.}$$

e perciò (4)

$$Z^{(y, x)} = \phi(y-x) + A'\phi(y-x-2) + A''\phi(y-x-4) \\ + A'''\phi(y-x-6) + \text{ecc.}$$

Facendo $x=1$ farà $A^{(\mu)}=1$, qualunque sia il numero μ ; quindi

$$Z^{(y, 1)} = \phi(y-1) + \phi(y-3) + \phi(y-5) + \phi(y-7) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(y-2, 1)} = \phi(y-3) + \phi(y-5) + \phi(y-7) + \text{ecc.}$$

Avremo perciò $Z^{(y, 1)} - Z^{(y-2, 1)} = \phi(y-1)$; ma $Z^{(y, 1)} = 1$ nel caso di y dispari e positiva, ed è $=0$ nel caso di y pari o negativa; dunque farà $\phi_0 = Z^{(1, 1)} - Z^{(-1, 1)} = 1$; negli altri casi farà $\phi_0 = 0$. Quindi $Z^{(y, x)} =$ al coefficiente di ϕ_0 ; sia questo coefficiente $A^{(m)}$, avremo $y-x-2m=0$,

cioè $m = \frac{y-x}{2}$. Siccome il valore di m deve essere intero,

converterà che il numero $y-x$ sia divisibile per due, cioè che i numeri y ed x siano o ambedue pari o ambedue dispari; ciò che deve necessariamente succedere, acciò il problema sia possibile. Posto questo farà

$$Z^{(y, x)} = \frac{\delta^1 \frac{y-x}{2}}{\frac{y-x}{2}} + \delta_1 \frac{\delta^2 \frac{y-x-2}{2}}{\frac{y-x}{2}} + \left(\frac{\delta^2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta^3 \frac{y-x-4}{2}}{\frac{y-x}{2}} \\ + \left(\frac{\delta^3}{3} + \delta_1 \frac{\delta^2}{3} + \left(\frac{\delta^2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta^4 \frac{y-x-6}{2}}{\frac{y-x}{2}} + \text{ecc.}$$

$$+ \left\{ \frac{\delta_4}{4} + \delta_1 \frac{\delta_3}{4} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_2}{4} + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta_1}{4} \right\} \frac{\delta^{\gamma-x-8}}{\frac{\gamma-x}{2}} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $\gamma = 14$, $x = 6$, avremo $\delta^{\frac{\gamma-x}{2}} = \delta_4 = 7$,

$$\delta_3 = 4, \delta_2 = 3, \delta_1 = 1, \text{ e } Z^{(14, 6)} = \frac{7}{4} + \frac{4}{4} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{3}{4} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \right) \frac{1}{4} = \frac{7+4+6+3}{4} = 5 = \text{al numero delle maniere, nelle quali il } 14 \text{ può esser la somma di sei numeri dispari.}$$

23. Se si aggiungerà nel Problema la condizione, che i termini della serie de' numeri dispari, la somma de' quali forma il numero γ , siano tutti disuguali, avremo allora l'equazione

$$Z(\gamma, x) = Z(\gamma-2x, x) + Z(\gamma-2x+1, x-1)$$

e operando come sopra troveremo l'integrale di questa equazione così espresso:

$$Z(\gamma, x) = \frac{\delta^{\frac{\gamma-x^2}{2}}}{\frac{\gamma-x^2}{2}} + \delta_1 \frac{\delta^{\frac{\gamma-x^2-2}{2}}}{\frac{\gamma-x^2}{2}} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta^{\frac{\gamma-x^2-4}{2}}}{\frac{\gamma-x^2}{2}} + \text{ecc.}$$

Supponendo per esempio $\gamma = 24$, $x = 4$, avremo

$$\delta^{\frac{\gamma-x^2}{2}} = \delta_4 = 7, \delta_3 = 4, \delta_2 = 3, \delta_1 = 1, \text{ e } Z^{(24, 4)} = \frac{7}{4} + \frac{4}{4} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{3}{4} + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3} \right) \frac{1}{4} = 5;$$

cioè cinque sono le maniere, nelle quali il numero 24 può esser la somma di quattro numeri dispari disuguali.

24. Se nella espressione del numero 22 si pone $y - x(x-1)$ in luogo di y , ne verrà la formola del numero precedente. Di qui nasce il seguente Teorema: il numero y in tante maniere può esser la somma di x termini tutti disuguali della serie de' numeri dispari, in quante il numero $y - x(x-1)$ può esser la somma di x termini della medesima serie o uguali o disuguali.

PROBLEMA VII.

25. *Trovare in quante maniere il numero y può nascere dalla somma de' numeri $1, 2, 3, 4, \dots, x$.*

Finora abbiamo supposto, che fosse assegnato il numero delle parti, nelle quali deve dividersi il numero y ; adesso passiamo ad un'altra sorte di problemi, ne' quali il numero delle parti può esser qualunque, ma sono soltanto determinate le parti; in modo che nella composizione del numero y non devono aver luogo che i numeri non maggiori di x , ma questi possono prenderli in qualunque numero. Sia $Z^{(y, x)}$ il numero delle maniere cercato, e ponendo

$$y = p + 2q + 3r + 4s + \dots + xt$$

è chiaro che tante saranno le maniere cercate, in quante possono da questa equazione determinarsi in numeri interi le lettere p, q, r, s, \dots, t . Ora tutte queste maniere si troveranno facendo successivamente $t = 0, 1, 2, 3$, ecc. ma le maniere, che corrispondono a questi valori di t , è chiaro che saranno espresse rispettivamente da $Z^{(y, x-1)}$, $Z^{(y-x, x-1)}$, $Z^{(y-2x, x-1)}$, ecc. Dunque avremo

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y, x-1)} + Z^{(y-x, x-1)} + Z^{(y-2x, x-1)} + \text{ecc.}$$

e ponendo $y - x$ in luogo di y

$$Z^{(y-x, x)} = Z^{(y-x, x-1)} + Z^{(y-2x, x-1)} + \text{ecc.}$$

donde nasce l'equazione

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y-x, x)} + Z^{(y, x-1)}.$$

Facciamo $Z^{(y, x)} = b^y \nabla_x^\alpha$, e farà $\alpha = \frac{1}{1 - b^{-x}}$, e quindi

$$\nabla^{\alpha} = \frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\dots(1-b^{-\alpha})}, \text{ cioè (2) ponendo}$$

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta_1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m} + \text{ecc.}$$

come sopra (22), farà (4)

$$Z^{(j,*)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

Posto $x=1$, avremo $A^{(\mu)}=1$ qualunque sia μ ; dunque

$$Z^{(j,1)} = \phi y + \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(j-1,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \text{ecc.}$$

e quindi $\phi y = Z^{(j,1)} - Z^{(j-1,1)}$. Ora si offervi che $Z^{(j,1)}$ è $=0$, quando y è negativa, perchè i numeri negativi non possono mai nascere dalla somma di unità; ed è $=1$ quando y è zero, perchè il zero nasce dalla somma di 0 unità. Dunque $Z^{(0,1)} - Z^{(-1,1)} = \phi 0 = 1$. Sia $A^{(m)}$ il coefficiente di $\phi 0$, ed avremo $y-m=0$, cioè $m=y$, e quindi

$$\begin{aligned} Z^{(j,*)} &= \frac{\delta y}{y} + \delta_1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta(y-2)}{y} \\ &+ \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta_1}{3}\right) \frac{\delta(y-3)}{y} \\ &+ \left\{ \frac{\delta_4}{4} + \delta_1 \frac{\delta_3}{4} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta_2}{4} \right. \\ &\left. + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2}\right) \frac{\delta_1}{3}\right) \frac{\delta_1}{4} \right\} \frac{\delta(y-4)}{y} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Sia per esempio $y=5$, $x=4$, avremo $\delta_5=1$, $\delta_4=7$, $\delta_3=4$, $\delta_2=3$, $\delta_1=1$, e quindi $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} + \frac{5}{5} = 6$. Dunque in sei maniere il numero 5 può nascere

dalla somma de' numeri 1, 2, 3, 4.

26. Se in questa formola ponghiamo $y-x$ in luogo di y , ne verrà quella del Problema quarto. Dunque il numero y in tante maniere può esser la somma di x numeri, in quante il numero $y-x$ può nascere dalla somma de' numeri 1,

2, 3, ..., x . Paragonando con questa le formole degli altri Problemi, ne nasceranno altri Teoremi.

P R O B L E M A VIII.

27. *Data una serie qualunque aritmetica (A) $m, m+n, m+2n$, ecc. trovare in quante maniere da x termini di questa serie si può formare il numero y .*

Sia $Z^{(y, x)}$ il numero delle maniere cercato, e facendo primieramente $x=2$, sia $y=m+(m+nz)=2m+nz$, alla qual forma può sempre ridursi il numero y , se pure può esser la somma di due termini della serie (A). Ma per la natura delle progressioni aritmetiche tra i termini m ed $m+nz$ ve ne sono altri di numero $z-1$, il primo de' quali è l'ultimo, il secondo e il penultimo, e gli altri nel medesimo ordine danno insieme l'istesso numero y ; ove si osservi che se $z-1$ è dispari, il doppio del termine medio è uguale al medesimo numero y . Dunque avremo $Z^{(y, 2)} = \frac{z+2}{2}$,

o $= \frac{z+1}{2}$, secondochè z è pari o dispari; quindi nell'uno e nell'altro caso avremo $Z^{(y-2n, 2)} = Z^{(y, 2)} - 1$, $Z^{(y-3n, 2)} = Z^{(y-n, 2)} - 1$, e generalmente $Z^{(y-\mu n, 2)} = Z^{(y-(\mu-2)n, 2)} - 1$.

Sia adesso $x=3$, ed $y=m+m+(m+nz)=3m+nz$; le lettere poi c, d, e siano i termini della serie (A), dalla somma de' quali nasce y , cioè sia $y=c+d+e$. Se facciamo $c=m$, avremo $d+e=2m+nz$, lo che può succedere in $Z^{(y-m, 2)}$ maniere; se $c=m+n$, farà $d+e=2m+n(z-1)$, il che succede in $Z^{(y-m-n, 2)}$ maniere. Similmente se $c=m+2n, m+3n, m+4n$, ecc. faranno i numeri delle maniere rispettivi $Z^{(y-m-2n, 2)}, Z^{(y-m-3n, 2)}, Z^{(y-m-4n, 2)}$, ecc. Ma si osservi, che delle maniere rappresentate da $Z^{(y-m-n, 2)}$ una dà $d=a$, la qual maniera è contenuta in quelle espresse da $Z^{(y-m, 2)}$. Così $Z^{(y-m-2n, 2)}, Z^{(y-m-3n, 2)}, Z^{(y-m-4n, 2)}$, ecc. contengono due, tre, quattro, ecc. maniere, che sono già state contate.

Ora per trovare il valore di $Z^{(y, 3)}$ convien sommare tutte queste particolari maniere, e farà perciò

M m m m m iij

$$Z(y, 3) = Z(y-m, 2) + Z(y-m-n, 2) - 1 + Z(y-m-2n, 2) - 2 \\ + Z(y-m-3n, 2) - 3 + \text{ecc.} \\ = Z(y-m, 2) + Z(y-m-3n, 2) + Z(y-m-6n, 2) + Z(y-m-9n, 2) + \text{ecc.}$$

Ponendo $y - 3n$ in luogo di y , farà similmente
 $Z(y-3n, 3) = Z(y-m-3n, 2) + Z(y-m-6n, 2) + Z(y-m-9n, 2) + \text{ecc.}$
 cioè $Z(y, 3) = Z(y-3n, 3) + Z(y-m, 2)$.

Con un discorso simile troveremo

$$Z(y, 4) = Z(y-4n, 4) + Z(y-m, 3) \\ Z(y, 5) = Z(y-5n, 5) + Z(y-m, 4)$$

e generalmente

$$Z(y, x) = Z(y-nx, x) + Z(y-m, x-1)$$

Per integrare questa equazione facciamo $Z(y, x) = b^y \nabla \alpha$, e

sostituendo avremo $\alpha = \frac{b^{-m}}{1 - b^{-nx}}$, e quindi

$$\nabla \alpha = \frac{b^{-mx}}{(1 - b^{-n})(1 - b^{-2n}) \dots (1 - b^{-nx})}. \text{ Adeffo ponendo}$$

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta \mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2} \right) \frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

come sopra, avremo

$$\nabla \alpha = b^{-mx} + Ab^{-mx-n} + A''b^{-mx-2n} + A'''b^{-mx-3n} + \text{ecc.}$$

e quindi (+)

$$Z(y, x) = \phi(y-mx) + A'\phi(y-mx-n) + A''\phi(y-mx-2n) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$, farà

$$Z(y, 1) = \phi(y-m) + \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc.}$$

e quindi $Z(y, 1) - Z(y-n, 1) = \phi(y-m)$. Di qui è facile il vedere, che $\phi.y = 1$ nel solo caso di $y = 0$: dunque se $A^{(\mu)}$ è nel valore di $Z(y, x)$ il coefficiente di $\phi.0$, cioè se

$$y - mx - n\mu = 0, \text{ e perciò } \mu = \frac{y-mx}{n}, \text{ farà}$$

$$Z(y, x) = \frac{\delta \frac{y-mx}{n}}{\frac{y-mx}{n}} + \delta 1 \frac{\delta \frac{y-mx-n}{n}}{\frac{y-mx}{n}}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta^{\frac{y-mx-2n}{n}}}{y-mx} + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta^{\frac{y-mx-3n}{n}}}{y-mx} + \text{ecc.},
 \end{aligned}$$

28. Se in questa formola ponghiamo $m=n=1$, ne nascerà quella del n°. 19. Se facciamo $m=1$, $n=2$, avremo il caso de' numeri dispari sopra (22) considerato. Se si pone $n=m$, ed $y=my$, ne verrà di nuovo la formola del n°. 19. Dunque il numero my in tante maniere si può dividere in x parti della forma mz , in quante maniere il numero y può dividersi in x parti di qualunque forma. Sia adesso $m=1$, $n=3$, ed avremo la serie (B) 1, 4, 7, 10, 13, ecc.; e farà in questo caso

$$\begin{aligned}
 Z^{(y,x)} &= \frac{\delta^{\frac{y-x}{3}}}{\frac{y-x}{3}} + \delta_1 \frac{\delta^{\frac{y-x-3}{3}}}{\frac{y-x}{3}} \\
 &+ \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta^{\frac{y-x-6}{3}}}{\frac{y-x}{3}} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

Quindi, acciò un numero y possa esser la somma di x termini della serie (B), conviene che $y-x$ sia divisibile per

$$\begin{aligned}
 3. \text{ Sia per esempio } y=16, x=4, \text{ avremo } \delta^{\frac{y-x}{3}} &= \delta_4 \\
 &= 7, \delta_3 = 4, \delta_2 = 3, \delta_1 = 1, \text{ e } Z^{(16,4)} = \frac{7}{4} + \frac{4}{4} + \frac{6}{4} \\
 &+ \frac{3}{4} = 5 = \text{al numero delle maniere, nelle quali il numero}
 \end{aligned}$$

16 può esser la somma di quattro termini della serie (B).
 Queste maniere sono le seguenti; $16 = 1 + 1 + 1 + 13$,
 $16 = 1 + 1 + 4 + 10$, $16 = 1 + 1 + 7 + 7$,
 $16 = 1 + 4 + 4 + 7$, $16 = 4 + 4 + 4 + 4$.

PROBLEMA IX.

29. Trovare in quante maniere da x diversi termini della serie (A) possa formarsi il numero y .

Con un discorso simile a quello del Problema precedente giungeremo alla equazione

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y-nx, x)} + Z^{(y-n(x-1)-m, x-1)}$$

Ponendo al solito $Z^{(y, x)} = b^y \nabla_x^\alpha$ avremo $\alpha = \frac{b^{-n(x-1)-m}}{1-b^{-nx}}$, e

$$\nabla_x^\alpha = \frac{b^{-mx-n \cdot x(x-1):2}}{(1-b^{-n})(1-b^{-2n}) \dots (1-b^{-nx})}; \text{ cioè farà (2)}$$

$$\nabla_x^\alpha = b^{-mx-n \cdot x(x-1):2} + A' b^{-mx-n \cdot x(x-1):2-n}$$

$$+ A'' b^{-mx-n \cdot x(x-1):2-2n} + \text{ecc.}$$

facendo come sopra

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta \mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2} \right) \frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

Quindi avremo (4)

$$Z^{(y, x)} = \phi\left(y - mx - n \frac{x(x-1)}{2}\right) + A' \phi\left(y - mx - n \frac{x(x-1)}{2} - n\right) \\ + A'' \phi\left(y - mx - n \frac{x(x-1)}{2} - 2n\right) + \text{ecc.}$$

Ponendo $x=1$, abbiamo $A' = A'' = \text{ecc.} = 1$; onde

$$Z^{(y, 1)} = \phi(y-m) + \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(y-n, 1)} = \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc}$$

cioè $\phi(y-m) = Z^{(y, 1)} - Z^{(y-n, 1)}$. Di qui apparisce, che

farà $\phi(y-m) = 1$ nel solo caso di $y=m$; dunque $Z^{(y, x)} =$

al coefficiente di ϕ . o; il quale se si pone essere $A^{(\mu)}$ avremo

$$y - mx - n \frac{x(x-1)}{2} - n\mu = 0, \text{ cioè}$$

$$\mu =$$

$$\begin{aligned}
 \mu &= \frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2}}{n}, \text{ e} \\
 \delta \frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2}}{n} & \quad \delta \frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2} - nx}{n} \\
 z^{(j, n)} &= \frac{\frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2}}{n}}{\frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2}}{n}} + \delta_1 \frac{\frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2} - nx}{n}}{\frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2}}{n}} \\
 &+ \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2} - 2nx}{n}}{\frac{y - mx - n \frac{x(x-1)}{2}}{n}} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

30. I Problemi de' numeri 20 e 23 sono casi particolari del precedente. Se vogliamo sapere ciò che succeda per riguardo alla serie (B), facciamo $m=1$, $n=3$, ed avremo

$$\begin{aligned}
 z^{(j, n)} &= \frac{\frac{y - x \frac{3x-1}{2}}{3}}{\left(y - x \frac{3x-1}{2} \right) : 3} + \delta_1 \frac{\frac{y - x \frac{3x-1}{2} - 3}{3}}{\left(y - x \frac{3x-1}{2} \right) : 3} \\
 &+ \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\frac{y - x \frac{3x-1}{2} - 3}{3}}{\left(y - x \frac{3x-1}{2} \right) : 3} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

Cerchiamo per esempio in quante maniere il numero 31 può esser la somma di 4 termini diversi della serie (B); a-

vremo $x=4$, $y=31$, $\frac{\delta y - x \frac{3x-1}{2}}{3} = \delta_3 = 4$, $\delta_2 = 3$,

$\delta_1 = 1$, e $Z^{(3),4)} = \frac{4}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 3$, le quali maniere sono:

$$31 = 1 + 4 + 7 + 19, \quad 31 = 1 + 4 + 10 + 16,$$

$$31 = 1 + 7 + 10 + 13.$$

31 Se nella formola del numero 27 ponghiamo

$y - n \frac{x(x-1)}{2}$ in luogo di y , ne nascerà quella del numero 29.

Di qui nasce il Teorema: in quante maniere il numero y può dividerli in x termini tutti disuguali della serie

(A), in altrettante il numero $y - n \frac{x(x-1)}{2}$ può dividerli

in x termini della medesima serie o uguali o disuguali.

PROBLEMA X.

32. Data una serie di numeri qualunque, della quale il termine generale sia Z , trovare in quante maniere il numero

y può esser la somma de' termini di questa serie

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_x.$$

Sia $Z^{(y),x)}$ il numero delle maniere cercato, e facciamo

$$y = pz_1 + qz_2 + rz_3 + sz_4 + \dots + tz_x$$

E' evidente che il numero cercato farà uguale al numero delle diverse maniere, nelle quali possono determinarsi le lettere p, q, r , ecc. in modo che soddisfacciano alla equazione precedente. Ora tutte queste maniere faranno in numero uguali alla somma di tutte quelle, che si hanno ponendo successivamente $t=0, 1, 2$, ecc. Ma il numero delle maniere corrispondenti a $t=0$ è espresso da $Z^{(y),x-1)}$; e similmente il numero delle altre che convengono ai valori di $t=1, 2, 3$, ecc. è rappresentato rispettivamente da $Z^{(y-z_1, x-1)}$,

$$Z(y-z, x-1) = Z(y-z, x) + Z(y-z, x-1) + Z(y-2z, x-1) + Z(y-3z, x-1) + \text{ecc.}$$

ma ponendo $y-z$ in luogo di y si ha

$$Z(y-z, x) = Z(y-z, x-1) + Z(y-2z, x-1) + Z(y-3z, x-1) + \text{ecc.}$$

Dunque si avrà l'equazione

$$Z(y, x) = Z(y-z, x) + Z(y, x-1).$$

Facciamo $Z(y, x) = b^x \nabla \alpha$, ed avremo $\alpha = \frac{1}{1-b^{-z}}$, e

$$\text{quindi } \nabla \alpha = \frac{1}{(1-b^{-z})(1-b^{-2z})\dots(1-b^{-nz})}.$$

Ponendo adesso

$$\nabla \alpha = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

è facile il vedere che farà sempre

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta_1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta(m-2)}{m} + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

ove $\delta m = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \dots + \frac{m}{m}$; ma di questo valore non devono prenderfi che i termini interi non maggiori di z , e

della forma z . Dunque farà sempre $A' = A'' = A''' = \text{ecc.} = 0$,

fino ad $A^{(z)} = z$. Posto questo avremo (4)

N n n n n ij

$Z^{(j,*)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$
 Ma ponendo $x=1$ abbiamo, com'è facile il vedere

$$Z^{(j,1)} = \phi y + \phi(y-x_1) + \phi(y-2x_1) + \phi(y-3x_1) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(j-x_1,1)} = \phi(y-x_1) + \phi(y-2x_1) + \phi(y-3x_1) + \text{ecc.}$$

Dunque $\phi y = Z^{(j,1)} - Z^{(j-x_1,1)}$, e $\phi y = 1$ nel solo caso di $y=0$. Sarà perciò $Z^{(j,*)} =$ al coefficiente di $\phi.c.$ cioè farà

$$Z^{(j,*)} = \frac{\delta y}{y} + \delta_1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta(y-2)}{y} \\ + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta(y-3)}{y} + \text{ecc.}$$

33. Per darne un esempio, si abbia l'equazione a due indeterminate r, t di primo grado, $a = br + ct$, ove a, b, c sono quantità cognite e positive, e $c > b$. E' noto che questa equazione ammette in numeri interi un numero finito di soluzioni. Per trovar questo numero si faccia $z_1 = b, z_2 = c$,

e il valore di $Z^{(a,2)}$ preso dal n.º precedente darà il numero cercato. Si abbia per esempio l'equazione $6 = 2r + 3t$, farà $z_1 = 2, z_2 = 3, \delta_1 = 0, \delta_2 = 2, \delta_3 = 3, \delta_4 = 2,$

$\delta_5 = 0, \delta_6 = 5$, e il numero delle soluzioni, che ammette in numeri interi questa equazione, farà $Z^{(6,2)} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = 2$. Queste due soluzioni sono le seguenti; $r=0,$

$t=2; r=3, t=0$, e oltre queste due non ve ne sono altre. L'istesso si dica dell'equazioni a più indeterminate.

34. Supponghiamo $z = nx$, cioè la serie proposta sia $n,$

$2n, 3n, \dots, xn$. E' chiaro che in questo caso il valore di $\nabla \alpha$ farà della forma

ove al solito

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta \mu}{\mu} + \delta_1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

ma nel valore di $\delta \mu$ devono prendersi tutt' i numeri interi. Avremo dunque

$$Z^{(y, n)} = \phi y + A' \phi(y-n) + A'' \phi(y-2n) + A''' \phi(y-3n) + \text{ecc.}$$

e ϕy essendo $= 1$ nel solo caso di $y = 0$ (32), farà

$Z^{(y, n)} =$ al coefficiente di $\phi 0$, il quale se si suppone essere

$A^{(\mu)}$, avremo $y - \mu n = 0$, cioè $\mu = \frac{y}{n}$; e quindi

$$\begin{aligned} Z^{(y, n)} = & \frac{\delta \frac{y}{n}}{y:n} + \delta_1 \frac{\delta \frac{y-n}{n}}{y:n} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta \frac{y-2n}{n}}{y:n} \\ & + \left(\frac{\delta_3}{3} + \delta_1 \frac{\delta_2}{3} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta_1}{3} \right) \frac{\delta \frac{y-3n}{n}}{y:n} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

35. Se nella formola del numero 27. ponghiamo $y + mx$ in luogo di y , ne nascerà questa. Dunque il numero y in tante maniere può nascere dalla somma di x termini della serie $m, m+n, m+2n, \text{ecc.}$; in quante il numero $y - mx$ può nascere dalla somma de' numeri $n, 2n, 3n, \dots, xn$.

36. Sia $z = (2x-1)n$, cioè la serie proposta sia la seguente, $n, 3n, 5n, \dots, (2x-1)n$. Avremo

$$Z^{(y, n)} = \phi y + A' \phi(y-n) + A'' \phi(y-2n) + A''' \phi(y-3n) + \text{ecc.}$$

e qui pure farà

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta \mu}{\mu} + \delta_1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

ove $\delta \mu = \mu + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} + \dots + \frac{\mu}{\mu}$, ma di questa serie non devono prendersi che i termini interi, dispari, e non maggiori di $2x-1$. E siccome $\phi y = 1$ nel solo caso di $y = 0$, farà

$$Z^{(y,*)} = \frac{\delta y}{y:n} + \delta_1 \frac{\delta^{y-n}}{y:n} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta^{y-2n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

Facendo $n=1$, farà il numero delle maniere, nelle quali y può esser la somma de' numeri dispari $1, 3, 5, \dots, 2x-1$ espresso da

$$Z^{(y,*)} = \frac{\delta y}{y} + \delta_1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $y=5$, $x=3$, cioè si cerchi in quante maniere il numero 5 può nascere dalla somma de' numeri $1, 3, 5$. Avremo $\delta y = \delta 5 = 5 + 1 = 6$, $\delta_4 = 1$, $\delta_3 = 3 + 1 = 4$, $\delta_2 = 1$, $\delta_1 = 1$, e il numero delle maniere cercato

$$= Z^{(5,3)} = \frac{6}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 3, \text{ le quali sono,}$$

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1, \quad 5 = 1 + 1 + 3, \quad 5 = 5.$$

37. Così se farà più generalmente $z = ((a-1)x - (a-2)n)$,

avremo

$$Z^{(y,*)} = \frac{\delta y}{y:n} + \delta_1 \frac{\delta^{y-n}}{y:n} + \left(\frac{\delta_2}{2} + \delta_1 \frac{\delta_1}{2} \right) \frac{\delta^{y-2n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

e nel valore di $\delta \mu = \mu + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} + \dots + \frac{\mu}{\mu}$ non dovranno prenderfi che i numeri interi della forma $(a-1)p - (a-2)$ non maggiori di $(a-1)x - (a-2)$.

38. Sia $z = c^{x-1}$; cioè si abbia la progressione geometrica

$1, c, c^2, \dots, c^{x-1}$; il valore di $Z^{(y,*)}$ farà quel medesimo

del n°. 32, e δy farà $= y + \frac{y}{2} + \frac{y}{3} + \dots + \frac{y}{y}$ prenden-

do solamente da questo valore i termini interi non maggiori di c^{x-1} e di questa forma. Si cerchi per esempio in quante maniere il numero 5 può nascere dalla somma de' termini $1, 2, 4$. Sarà $c=2$, $y=5$, $x=3$, $c^{x-1}=4$, e $\delta y = \delta 5 = 1$, $\delta 4 = 4 + 2 + 1 = 7$, $3 = 1$, $\delta 2 = 2 + 1 = 3$,

$\delta 1 = 1$, e quindi il numero cercato $Z^{(1,1)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{2}{5}$
 $+ \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 4$, le quali maniere sono $5 = 1 + 1 + 1 + 1$
 $+ 1$, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$, $5 = 1 + 2 + 2$, $5 = 1 + 4$.

39. Sia finalmente z il termine generale de' numeri primi della forma $4m + 1$; in questo caso nel valore di δy dovranno prenderli i soli termini, che sono numeri primi della forma $4m + 1$ non maggiori di z . Se per esempio ti cerca in quante maniere il numero 7 può esser la somma de' numeri primi della forma $4m + 1$, farà $\delta y = \delta 7 = 1$, $\delta 6 = 1$, $\delta 5 = 5 + 1 = 6$, $\delta 4 = 1$, $\delta 3 = 1$, $\delta 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{6}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 2$, le quali maniere sono $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $7 = 1 + 1 + 5$.

PROBLEMA XI.

40. Data una serie di numeri qualunque, della quale il termine generale sia z , trovare in quante maniere il numero

y può nascere dalla somma di termini diversi di questa serie, continuata fino al termine z .

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e supponghiamo $y = pz_1 + qz_2 + rz_3 + \dots + tz_x$. Per la natura del Pro-

blema ciascuna delle quantità p, q , ecc. non può essere che $= 0$, oppure $= 1$; quindi il numero delle maniere cercato farà uguale alla somma de' numeri delle maniere, che nascono dal fare $t = 0$, e $t = 1$. Ma facendo $t = 0$, e $t = 1$,

(y, x) diventa $(y, x-1)$, e $Z^{(y-x, x-1)}$; dunque l'equazione del Problema farà

$$Z(y, x) = Z(y, x-1) + Z(y-z, x-1)$$

Per integrar questa equazione facciamo $Z(y, x) = b^x \nabla^x$, ed

$$\text{avremo } \alpha = 1 + b^{-z}, \text{ e } \nabla^x = (1 + b^{-z}) (1 + b^{-z})$$

$$(1 + b^{-z}) \dots (1 + b^{-z}). \text{ Ponghiamo}$$

$$\nabla^x = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

e supponendo $\gamma m = m - \frac{m}{2} + \frac{m}{3} - \frac{m}{4} \dots \pm \frac{m}{m}$, ma prendendo di questa serie solo i termini interi non maggiori di z ,

e della forma z , è facile il vedere che avremo (2)

$$A^{(m)} = \frac{\gamma m}{m} + \gamma_1 \frac{\gamma(m-1)}{m} + \left(\frac{\gamma^2}{2} + \gamma_1 \frac{\gamma_1}{2} \right) \frac{\gamma(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\gamma^3}{3} + \gamma_1 \frac{\gamma^2}{3} + \left(\frac{\gamma^2}{2} + \gamma_1 \frac{\gamma_1}{2} \right) \frac{\gamma_1}{3} \right) \frac{\gamma(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Posto questo valore di $A^{(m)}$, avremo

$$Z(y, x) = \phi y + A' \phi(y-1) + A'' \phi(y-2) + A''' \phi(y-3) + \text{ecc.}$$

ove $\phi y = Z(y, 0)$. Ma $Z(y, 0) = 1$ nel solo caso di $y = 0$, negli altri casi $Z(y, 0) = 0$; dunque $Z(y, x) = A^{(y)}$.

41. Sia $z = x$, cioè la serie proposta sia quella de' nu-

meri naturali; in questo caso prendendo nel valore di γm tutt' i termini interi minori di x , avremo

$$Z(y, x) = \frac{\gamma y}{y} + \gamma_1 \frac{\gamma(y-1)}{y} + \left(\frac{\gamma^2}{2} + \gamma_1 \frac{\gamma_1}{2} \right) \frac{\gamma(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $y = 5$, $x = 4$, avremo $\gamma y = \gamma_5 = 1$,

$$\gamma_4 = 4 - 2 - 1 = 1, \gamma_3 = 3 + 1 = 4, \gamma_2 = 1, \gamma_1 = 1,$$

$$\text{e il numero delle maniere cercato } Z(5, 4) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}$$

+

$1 + \frac{2}{5} = 2$, le quali maniere sono $5 = 1 + 4$, $5 = 2 + 3$.

42. Ripigliamo l'equazione appartenente a questo caso

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y, x-1)} + Z^{(y-x, x-1)}$$

e ponendovi $y - x$ in luogo di y

$$Z^{(y-x, x)} = Z^{(y-x, x-1)} + Z^{(y-2x, x-1)}$$

e sostituendo nella prima il valore di $Z^{(y-x, x-1)}$ preso da questa

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y-x, x)} + Z^{(y, x-1)} - Z^{(y-2x, x-1)}$$

Facciamo $Z^{(y, x)} = b^y \nabla^x$, ed avremo $\alpha = \frac{1 - b^{-2x}}{1 - b^{-x}}$, e

$$\nabla^x = \frac{(1 - b^{-2})(1 - b^{-4}) \dots (1 - b^{-2x})}{(1 - b^{-1})(1 - b^{-2}) \dots (1 - b^{-x})}; \text{ e ponendo } x \text{ infinito}$$

$$\nabla^x = \frac{1}{(1 - b^{-1})(1 - b^{-2})(1 - b^{-3}) \dots}, \text{ ove gli espo-}$$

ponenti di b sono i numeri dispari. Quindi $Z^{(y, x)}$ avrà in questo caso il medesimo valore, che ha al n°. 36. (formola seconda); onde nasce il Teorema. In tante maniere il numero y può formarsi dalla somma di numeri disuguali, in quante il medesimo numero y può essere la somma di numeri dispari o uguali tra loro o disuguali. Similmente paragonando la formola del n°. 36. con quella del n°. precedente troveremo quest' altro curioso Teorema; cioè $\delta.y = \gamma.y$, o sia

$$y + \frac{y}{2} + \frac{y}{3} + \dots + \frac{y}{y} = y - \frac{y}{2} + \frac{y}{3} - \frac{y}{4} + \dots \pm \frac{y}{y}$$

prendendo nel primo membro solo i termini interi, e dispari; nel secondo i termini interi. Il Teorema è evidente se y è dispari, ma è ugualmente vero se y è pari.

43. Sia $z = c^{x-1}$, cioè si abbia la serie geometrica

$1, c, c^2, \dots, c^{x-1}$, e prendendo nel valore di

$$\gamma m = m - \frac{m}{2} + \frac{m}{3} - \frac{m}{4} + \dots \pm \frac{m}{m} \text{ solo i termini interi non}$$

maggiori di c^{x-1} e di questa forma, avremo

$$Z^{(y,*)} = \frac{\gamma^y}{y} + \gamma^1 \frac{\gamma(y-1)}{y} + \left(\frac{\gamma^2}{2} + \gamma^1 \frac{\gamma^1}{2} \right) \frac{\gamma(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per esempio in quante maniere il numero 5 può esser la somma di numeri diversi presi tra i termini della progressione 1, 2, 4. Sarà $x=3$, $c=2$, $y=5$, $\gamma y = \gamma 5 = 1$, $\gamma 4 = 4 - 2 - 1 = 1$, $\gamma 3 = 1$, $\gamma 2 = 2 - 1 = 1$, $\gamma 1 = 1$, e $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$.

Generalmente se supporremo x comunque grande, cioè se non farà più limitato il numero de' termini della progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, ecc. si toglierà la condizione di prendere dal valore di γ^m i numeri non maggiori di 2^{x-1} . Sarà dunque γ^m della forma $2^m - 2^{m-1} - 2^{m-2} - \dots - 2 - 1$, cioè farà sempre $= 1$. Quindi $Z^{(y,*)}$ farà sempre $= 1$ qualunque sia il numero y . Abbiamo adunque questo Teorema: che qualunque numero può nascere dalla somma di termini diversi della progressione geometrica 1, 4, 8, ecc. in una sola maniera.

44. Quei teoremi, che abbiamo in qua e in là osservati, sono già stati per la maggior parte ritrovati dal Sig. Eulero. Noi gli abbiamo dedotti dalla soluzione de' diverli problemi; ma dall'equazione de' medesimi potevano subito senza alcuna integrazione ritrovarsi, come insegnano i seguenti Problemi, i quali insieme ci aprono la strada a ritrovare molti altri simili teoremi.

P R O B L E M A XII.

45. *Date le due seguenti equazioni*

$$Z^{(y,*)} = A \underset{x}{Z^{(y-q,*,*)}} + B \underset{x}{Z^{(y-f,*,*)}}$$

$$\Pi^{(y,*)} = A \underset{x}{Z^{(y-q,*,*)}} + B \underset{x}{Z^{(y-f,*,*)}}$$

composte di tre termini, nelle quali i coefficienti rispettivi siano uguali, e i primi due termini siano della medesima forma, ridurre l'integrazione della seconda equazione alla integrazione della prima.

Facciamo $\Pi \frac{(y, x)}{(y - F.x, x)} = Z$, e sostituendo questo valore nella seconda equazione essa diventerà

$$Z \frac{(y - F.x, x)}{(y - \phi.x - F.x, x)} = A Z$$

$$+ B Z \frac{(y - f'.x - F(x - 1), x - 1)}{}$$

Ma dalla prima equazione abbiamo

$$Z \frac{(y - F.x, x)}{(y - \phi.x - F.x, x)} = A Z$$

$$+ B Z \frac{(y - f.x - F.x, x - 1)}{}$$

Dunque $y - f.x - F(x - 1) = y - f.x - F.x$, cioè

$$F.x - F(x - 1) = f'.x - f.x, \text{ e}$$

$F.x = \Sigma (f'(x + 1) - f(x + 1)) + \text{Cost.}$ La costante si determinerà così. Sia $\Sigma f'(x + 1) - \Sigma f(x + 1) = a$ nel caso di $x = 1$, e si abbia $\Pi^{(0, 1)} = Z^{(y-b, 1)}$, avremo $F.1 = b$, e $\text{Cost.} = b - a$.

46. Si abbiano per esempio le due equazioni

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y-x, x)} + Z^{(y, x-1)}$$

$$\Pi^{(y, x)} = \Pi^{(y-x, x)} + \Pi^{(y-x, x-1)}$$

la prima delle quali appartiene al n°. 25, la seconda al n°.

20. Avremo $F.x = \Sigma (x + 1) = \frac{x(x + 1)}{2} + \text{Cost.}$ Ora si osservi che

$$Z^{(0, 1)} = 1, Z^{(1, 1)} = 1, Z^{(2, 1)} = 1, \text{ ecc.}$$

$$\Pi^{(0, 1)} = 0, \Pi^{(1, 1)} = 1, \Pi^{(2, 1)} = 1, \text{ ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y, 1)} = Z^{(y-1, 1)}$, cioè $b = 1$, $a = 1$, e la costante $= 0$: quindi $F.x = \frac{x(x + 1)}{2}$, e $\Pi^{(y, x)} = Z^{(y-x(x+1):2, x)}$.

Di qui nasce il Teorema: In quante maniere il numero y può dividersi in x parti disuguali, in altrettante il numero $y - \frac{x(x + 1)}{2}$ può nascere dalla somma de' numeri $1, 2, 3, \dots, x$.

47. Più generalmente si abbiano l'equazioni

$$Z(y, x) = Z(y - nx, x) + Z(y, x-1)$$

$$\Pi(y, x) = \Pi(y - nx, x) + \Pi(y - n(x-1) - m, x-1),$$

che sono quelle de' numeri 34, e 29. Sarà $F.x = \Sigma(nx + m)$

$$= n \frac{x(x-1)}{2} + mx + \text{Cost. Ma facciamo essere}$$

$$Z(0, 1) = 1, Z(n, 1) = 1, Z(2n, 1) = 1, \text{ ecc.}$$

$$\Pi(0, 1) = 0, \Pi(m, 1) = 1, \Pi(m+n, 1) = 1, \Pi(m+2n, 1) = 1, \text{ ecc.}$$

e quindi $\Pi(y, 1) = Z(y-m, 1)$. Dunque $b=m$, $a=m$, e Cost.

$$= m - m = 0, \text{ cioè } \Pi(y, x) = Z(y - m; -nx(x-1):2, x); \text{ onde in tante ma-}$$

nere il numero y può esser la somma di x termini della serie $m, m+n, m+2n, \text{ ecc.}$ disuguali tra loro, in quante

$$\text{il numero } y - mx - n \frac{x(x-1)}{2} \text{ può nascere dalla somma de'}$$

numeri $n, 2n, 3n, \dots, xn$.

P R O B L E M A XIII.

48. Più generalmente date l'equazioni

$$Z(y, x) = A \underset{x}{Z(y-f.x, x)} + B \underset{x}{Z(y-f.x, x-1)}$$

$$\Pi(y, x) = A \underset{x}{\Pi(y-m.x, x)} + B \underset{x}{\Pi(y-f'.x, x-1)}$$

ove m è costante, ridurre l'integrazione della seconda equazione a quella della prima.

Facciamo $\Pi(y, x) = Z \begin{smallmatrix} ((y - F.x):m, x) \end{smallmatrix}$, e la seconda equazione diventerà

$$\begin{aligned} Z \begin{smallmatrix} ((y - F.x):m, x) \end{smallmatrix} &= A \underset{x}{Z \begin{smallmatrix} ((y - m\phi.x - F.x):m, x) \end{smallmatrix}} \\ &+ B \underset{x}{Z \begin{smallmatrix} ((y - f'.x - F(x-1)):m, x-1) \end{smallmatrix}} \end{aligned}$$

Ma ponendo nella prima equazione $y - \frac{(m-1)y + F.x}{m}$ in luogo di y avremo

$$Z^{((y-F.x):m, x)} = A Z^{((y-mf.x-F.x):m, x)} \\ + B Z^{((y-mf.x-F.x):m, x-1)}$$

Dunque $y - mf.x - F.x = y - f'.x - F(x-1)$, cioè $F.x - F(x-1) = f'.x - mf.x$, e integrando $F.x = \Sigma f'(x+1) - m \Sigma f(x+1) + \text{Cost.}$ e la costante si determinerà come sopra.

49. Si abbiano per esempio l'equazioni de' numeri 19, e 22,

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y-x, x)} + Z^{(y-1, x-1)} \\ \Pi^{(y, x)} = \Pi^{(y-2x, x)} + \Pi^{(y-1, x-1)}.$$

Sarà $F.x = \Sigma(1-2) = -x + \text{Cost.}$ per determinare questa costante si osservi che

$$Z^{(1, 1)} = 1, Z^{(2, 1)} = 1, Z^{(3, 1)} = 1, \text{ ecc.}$$

$$\Pi^{(1, 1)} = 1, \Pi^{(2, 1)} = 0, \Pi^{(3, 1)} = 1, \text{ ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y, 1)} = Z^{((y+1):2, 1)}$, e la Cost. = 0; avremo perciò $\Pi^{(y, x)} = Z^{((y+x):2, x)}$, e quindi il Teorema: In quante maniere il numero y può dividersi in x parti dispari, in altrettanti il numero $\frac{y+x}{2}$ può dividersi in x parti o pari o dispari.

50. Siano proposte l'equazioni de' numeri 19, e 27,

$$Z^{(y, x)} = Z^{(y-x, x)} + Z^{(y-1, x-1)} \\ \Pi^{(y, x)} = \Pi^{(y-nx, x)} + \Pi^{(y-m, x-1)}$$

Avremo $F.x = \Sigma(m-n) = (m-n)x + \text{Cost.}$ Ora si rifletta che i valori di $\Pi^{(y, x)}$ vanno con quest'ordine;

$$\Pi^{(m, 1)} = 1, \Pi^{(m+n, 1)} = 1, \Pi^{(m+2n, 1)} = 1, \text{ ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y, 1)} = Z^{((y-nx+n):n, 1)}$, quindi la Cost. = 0, e

$\Pi^{(y, x)} = Z^{((y-(m-n)x):n, x)}$. Onde in tante maniere il numero y è la somma di x termini della serie $m, m+n, m+2n$,

ecc; in quante il numero $\frac{y-(m-n)x}{n}$ è la somma di x ter-

mini della serie naturale. Col metodo medesimo paragonando tra loro le altre equazioni di sopra ritrovate, se ne dedurranno altri Teoremi.

OSSERVAZIONE ANATOMICA

SOPRA UN VITELLO-VACCA DETTO DAGL' INGLESI FREEMARTIN.

Del Sig. ANTONIO SCARPA Pubblico Professore di Notomia, ed Operazioni chirurgiche nella R. Università di Pavia.

E' Stato mai sempre un oggetto di curiosità, e di ricerca, se fra gli animali che noi chiamiamo perfetti si generino alcune volte degl' individui che dotati sieno del doppio ordine d' organi maschile, e femminile. Presso gli antichi Scrittori si trovano registrate molte osservazioni relative a quest' argomento; ma, per dir vero, sì poco dettagliate, che sottoposte ad un rigoroso esame hanno dato luogo a dubitare grandemente della verità di tali fatti, o perchè fondati unicamente sopra esterne fallaci apparenze, o perchè non abbastanza confermati da una minuta, e perita sezione delle parti destinate all' uso della generazione. Sembra dalle imperfette loro relazioni che la sola apparenza d' una fessura nel perineo, l' incompleta discesa dei testicoli, la brevità, o deviazione dell' uretra nei maschi, e lo sproporzionato allungamento della clitoride nelle femmine sieno stati riguardati da loro come motivi bastanti per decidere della presenza dei due sessi combinati in un medesimo individuo. Quindi è che il celebre *Hallero* (1) dopo un critico esame di tali fatti confrontati con altri simili ha creduto di dare a ciascheduna osservazione di questo genere il suo giusto valore riducendo tutte le storie dei pretesi Ermafroditi a due classi principali di deformità; una cioè che risulta dalla non naturale forma, sede, sviluppo delle parti maschili; l' altra dal non ordinario ingrandimento della clitoride nelle femmine. Non ha lasciato però

(1) *Num dentur Hermaphroditi Comment.*

questo grand' uomo d' avvertire, che trattandosi d' una opinione ricevuta per tanti secoli, ed accreditata dall' asserzione di molti Scrittori, ed in tempi diversi, vi poteva essere non ostante qualche cosa di vero (2). Avvi per appunto qualche cosa di vero nell' antica opinione degli Ermafroditi fra gli animali detti perfetti, e sembra che avesse dovuto meritare molto prima l' attenzione dei curiosi della natura un fatto relativo a questo argomento, il quale oltre d' esser sommaramente rimarcabile per la sua frequenza e costanza, qual principio immutabile nella propagazione d' alcune specie d' animali perfetti, lo è poi grandemente per somministrare una prova convincente, che anco fra gli animali perfetti si generano alcune volte degl' individui, i quali benchè a tutto rigore di vocabolo dir non si possano veri, e completi Ermafroditi, però forniti sono or più or meno d' ambedue i sessi misti, e combinati in un medesimo soggetto.

Egli è un fatto avverato, e costante, noto fin al volgo degli agricoltori, che ogni qualvolta una vacca depone due gemelli, e che uno di questi sia decisamente maschio, l' altro sembri femmina, questo secondo non è precisamente bene nè l' uno nè l' altra, ma si trova fornito degli organi d' ambedue i sessi con più, o meno di perfezione. Il primo diviene un toro nella via ordinaria. Il secondo arrivato alla maturità non mostra la più picciola inclinazione per il toro, nè il toro per lui. Non così succede se ambedue i gemelli sono femmine, o maschi (3).

(2) *Ibidem.* Quæ omnia, dice egli, ut non satis anatomica, aut ad persuadendum firma sunt; ita certe suspicionem tamen non absurdam movent veri quid in opinione esse, in qua adeo multi homines tam diversis temporibus consenserunt. Raro enim fit, ut his late patentibus opinionibus nihil veri subfit. Id poliporum exemplo apparet, quorum renascentia brachia recentior industria confirmavit, & innumeris aliis argumentis, quæ deprecari culpam quotidie nos cogunt, & antiquorum hominum curiositatem venerari, quam tamquam fabulosam sperveramus.

(3) Quantunque non apparisca chiaramente che i Romani conosciuto abbiano tutte queste circostanze, però egli è certo che nei loro scritti d' agricoltura hanno fatto menzione di quest' animale, e che l' hanno distinto dalla vacca col nome di *Tauræ*. Columella de Re Rust. lib. VI. Cap. XXII. sed & curandum est, dice egli, omnibus annis in hoc æque, atque in reliquis gregibus pecoris, ut delectus habeatur; nam, & enixæ, & vetustæ quæ gignere desierunt summovendæ sunt, & utique Tauræ, quæ locum fecundarum occupant ablegandæ, vel aratio

Il Sig. Giovanni *Hunter* uomo d' acuto ingegno , ed uno dei più felici indagatori della natura , ha sottoposto tre di questi animali a una diligente notomia , e nell' anno 1779 ha comunicato sopra questo proposito le sue osservazioni alla R. Società di Londra . Riferirò qui brevemente il risultato delle osservazioni del Sig. *Hunter* onde render più chiaro quanto sono per soggiungere sopra questo stesso argomento .

Nel primo di questi animali esaminati dal Sig. *Hunter* di sett' anni circa le parti esterne della generazione erano più piccole che nella vacca . La vagina al di là dell' orifizio dell' uretra ristretta si maggiormente si stendeva sin all' utero , a cui era aperto l' adito alla divisione di esso nelle due corna . Le corna dell' utero si allungavano in ciaschedun lato secondando il margine del legamento largo . Ove finivano le corna dell' utero , risiedevano le ovaja , ed accanto a queste i testicoli . Mancavano le trombe fallopiane . I vasi deferenti erano imperfetti ; il destro solamente continuava sin vicino al testicolo . Pervj però ambedue questi canali inferiormente si aprivano nella vagina in vicinanza dell' orifizio dell' uretra . Dietro la vescica , cioè fra questa e l' utero , si trovavano le vescichette seminali . Queste parimente si aprivano nella vagina insieme coi condotti deferenti .

Nel secondo di questi animali di cinque anni la vagina poco al di là dell' orifizio dell' uretra finiva in un sacco cieco . L' utero , benchè impervio , si divideva secondo il solito nelle due corna , all' estremità delle quali in luogo delle ovaja erano collocati i testicoli . Che poi fossero i testicoli si conosceva 1°. Dall' esser' venti volte più grandi dell' ovaja nella vacca , e quasi della grandezza dei testicoli del toro prima che discendano dal ventre . 2°. Dalle arterie del cordone spermatico simili a quelle del toro . 3°. Dal muscolo cremastere , che dall' anello dei muscoli del basso ventre si cur-

vava

Domandò , quoniam laboris , & operis non minus quam juvenci , propter uteri sterilitatem , patientes sunt .

M. Varrone parimente *de Re Rust.* lib. II. Cap. V. fa menzione di quest' animale . *Discernuntur* , dice egli , *in prima vitula , & vitula : in secunda*

juvencus , & juvenca : in tertia , & quarta taurus , & vacca . Quae sterilis est vacca Taura appellata . Sotto le medesime circostanze accade di vedere la produzione d' un esser simile anche nei cavalli , asini , e pecore .

vava all' insù per involgere il testicolo. Mancavano i condotti deferenti. Fra l'utero poi e la vescica urinaria v'erano le vescichette femminali, i condotti delle quali si aprivano nella vagina.

Il terzo di questi animali era fra i tre, e quattr'anni. La vagina esternamente, come nella vacca, finiva internamente, ed un po' al di là dell'orifizio dell'uretra in un sacco cieco. L'utero chiuso, diviso nelle due corna all'estremità delle quali risiedevano le uova. Mancavano i testicoli. Solo accanto dell'utero si vedeva un vaso deferente con molte interruzioni. Fra l'utero e la vescica comparivano le vescichette femminali, ed in vicinanza di queste le estremità dei condotti deferenti, coi quali comunicando le vescichette si aprivano insieme nella vagina, come nelle osservazioni precedenti.

Desideroso io pure di replicare queste osservazioni mi sono diretto a S. E. Marchese Gherardo *Rangone* Ministro, e Segretario di Stato di S. A. S. Duca di Modena, Cavaliere d'elevati talenti, e noto già per lo zelo efficace in promuovere le scienze, affinchè ottenersi potessi l'opportunità di riscontrare questi fatti. Alla prima ricerca nei vicini poderi dell'E. S. si è trovato che una vacca aveva deposto pochi giorni prima due gemelli uno maschio, l'altro apparentemente femmina. Senza cercare più oltre ha ordinato l'E. S. che fosse custodita, e nutrita la femmina. In capo a tredici mesi circa ne ho fatto la sezione in presenza dell'E. S., del Cav. *Rosa*, e Professore *Savani*, ambedue allora miei Colleghi. L'esterna configurazione di tutto il corpo di quest'animale aveva molto del toro. Sotto il ventre comparivano i capezzoli, ed i corpi glandulari delle poppe. L'esterne parti genitali erano più piccole che nella vitella d'un anno. Dall'angolo superiore delle labbra fortiva un corpicciolo (4) che alzandosi verso l'ano curvava la punta all'indietro a guisa d'uncino. Dietro l'apice di questo corpicciolo stava nascosto l'orifizio dell'uretra (5). La vagina incurvata sotto l'ure-

Tomo II,

P p p p p

(4) BBBB

(5) C.

tra si stendeva internamente per lo spazio di tre dita trasverse (6), poi finiva in un sacco cieco. L' interna superficie della vagina era tutta sparfa di rughe molli, e polpose. Il fondo cieco di questo canale era posteriormente unito per mezzo d' una cellulare compatta ad un corpo cavernoso (7) che nato dall' ischio destro, e ripiegato alquanto in se stesso si allungava posteriormente, e superiormente fin' a formare quel corpicciolo, che si vedea spuntare dall' angolo superiore delle labbra. Paragonato questo corpo colla clitoride della vacca ho trovato che ne aveva una grande somiglianza, sì perchè la clitoride stessa vicino alla sua origine si ripiega, ed attortiglia alquanto in se stessa; come perchè il suo corpo cavernoso non mostra internamente alcun tramezzo, e finisce essa pure in un apice acuto, ed un po' ricurvo. La principale, e forse sola differenza consisteva nella sede; poichè la clitoride nella vacca scorre sotto la vagina, e spunta all' angolo inferiore delle labbra; mentre nell' animale di cui si parla era collocata la clitoride sopra la vagina, ed esciva sotto l' angolo superiore delle labbra.

Aperto il ventre onde esaminare gl' interni organi genitali, si è osservato che i testicoli (8) erano rinasti molto alti nel ventre; un po' più piccoli che nel toro d' un anno; ma però ben conformati, e sviluppati, tanto esternamente, che nell' interna tessitura. Detratto il muscolo cremastere, da cui ciaschedun era cinto, si vedea partire dall' epididimo il vaso deferente, che dirigeva il suo corso discendendo verso la faccia posteriore della vescica. Ivi collocate erano le vescichette feminali (9) colle quali comunicavano i vasi deferenti, e si allungavano insieme inferiormente in un condotto comune. Tanto le vescichette, che i vasi deferenti erano pieni d' un umor giallognolo. Cingeva il collo della vescica urinaria un grosso corpo glandolare (10) simile alla prostata, il quale abbracciava insieme l' uretra quasi per tutta la

(6) AAA.

(7) BBB.

(8) KK.

(9) GG.

(10) DDDD.

tua estensione. Aperta la vescica, e l'uretra secondo la loro lunghezza, ed introdotto uno specillo per entro ciascheduno dei vasi deferenti, sono compariti questi nell'uretra (11) ai lati d'una prominenzia che tenea luogo di capo gallinaceo. Immediatamente sotto gli orifizj comuni ai vasi deferenti, e vescichette feminali l'uretra si profondava a guisa d'una fossa ellittica scavata nel grosso, e polposo corpo della prostata (12) con qualche apparenza di ciò che chiamiamo bulbo dell'uretra; indi l'uretra nuovamente ristretta, e sempre cinta dalla prostata scorrendo un po' obliquamente all'insù si apriva esternamente, come è stato accennato, all'angolo superiore delle labbra.

Per poco che si rifletta sopra la costruzione degli organi genitali di questo animale apparisce chiaramente che gl'interni dagli orifizj dei vasi feminali all'insù erano perfettamente maschili, e gli esterni femminei, se non del tutto almeno in gran parte, sì per la presenza della vagina, e brevità dell'uretra, che per il corpo cavernoso, il quale non differiva dalla clitoride, che nell'esser collocato nella parte superiore della vagina.

Confrontando questa osservazione con quelle del Sig. *Hunter*, parmi di potere inferire, che sì in quelle, che in questa vi era un misto d'organi maschili, e femminei, colla differenza, che negli animali esaminati dal Sig. *Hunter* gli organi genitali interni erano un composto d'ambidue i sessi con più, o meno di perfezione; in questo di cui ho riportata la storia gl'interni erano unicamente e perfettamente maschili, gli esterni femminei.

Son ben lontano dall'asserire che tanto quegli animali, che questo meritassero il nome di veri, e completi Ermafroditi, a rigore di vocabolo. Solo mi restringo ad osservare, e provare ulteriormente, che anco negli animali perfetti, sotto certe determinate circostanze, si generano degl'individui, che forniti sono in un degli organi propri di ciaschedun ses-

P p p p p ij

(11) F.

(12) E.

so , e che la natura ha , per così dire , fatto un passo anche negli animali detti perfetti verso la costruzione d' un essere androgeno .

Vi sono , come abbiamo indicato , delle varietà nella preponderanza degli organi dell' uno , o dell' altro sesso combinati , e misti in un medesimo soggetto nei diversi individui . Quindi è che io mi propongo d' esaminare molti altri di questi animali , e nelle varie classi in cui si generano , onde registrarne le diverse combinazioni .

Spiegazione della Tavola .

Il collo della vescica , la prostata , e l' uretra aperte inferiormente , cioè dalla parte del ventre dell' animale , poi rivolte all' insù , onde vedere più distintamente gli orifizj dei vasi seminali nell' uretra . Le parti esterne genitali sono nella situazione loro naturale .

AAA. La vagina aperta .

BBB. Corpo cavernoso simile alla clitoride .

C. L' orifizio dell' uretra .

DDDD. La prostata .

E. Fossa ellittica dell' uretra .

F. Gli orifizj dei vasi seminali entro l' uretra .

GG. Le vescichette seminali .

HH. L' estremità dei vasi deferenti .

KK. I testicoli .



OPPOSIZIONE

DEL NUOVO PIANETA

Offervata nel 1781

Dal Sig. GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Professore
d' Astronomia nell' Università di Pisa.

FU osservato il pianeta il dì 22 e 23 Dicembre al Quadrante *Murale* insieme con le stelle η e μ dei Gemini e con una piccola stella, che nel Catalogo di Tobia Mayer è notata al n.º 245. La troppa vicinanza fra i passaggi del pianeta e delle stelle η e 245 dei Gemini per il meridiano non ha permesso di osservare alle divisioni del Quadrante la distanza delle due stelle dal vertice, onde non si è potuta notare la differenza fra la loro declinazione e quella del pianeta. Nella riduzione delle osservazioni si è fatto uso per le stelle η e 245 dei luoghi presi dal Catalogo di Mayer, e per la stella μ di quelli del Catalogo di *Bradley*, e si è tenuto conto dei piccoli moti apparenti delle stelle dal dì 22 al dì 23 Dicembre. I luoghi delle predette stelle sono tutti calcolati per il dì 22 Dicembre.

Dal Catalogo di Bradley.

η dei Gemini Ascensione retta	3 ^h . 08 ^m . 26 ^s . 2", 6
Declinazione boreale	0. 22. 33. 15, 1
μ dei Gemini Ascensione retta	3. 2. 26. 44, 4
Declinazione boreale	0. 22. 36. 37, 4

Dal Catlogo di stelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

η dei Gemini Ascensione retta	3. 0. 26. 52, 4
Declinazione boreale	0. 22. 33. 20, 9
Ppppp iij	

μ dei Gemini Ascensione retta	3 ^r . 28. 26'. 35'', 9
Declinazione boreale	0. 22. 36. 42, 2

Dal Catalogo delle stelle Zodiacali di Tobia Mayer.

η dei Gemini Ascensione retta	3. 0. 25. 59, 3
Declinazione boreale	0. 22. 33. 18, 7
Stella 245. ^{ma} Ascensione retta	3. 1. 24. 33, 4
Declinazione boreale	0. 23. 40. 21, 5
μ dei Gemini Ascensione retta	3. 2. 26. 37, 9
Declinazione boreale	0. 22. 36. 41, 1

Il dì 22 Dicembre tempo medio 11.^{ore} 55'. 58''.

Differenza osservata fra il pianeta ed η dei Gemini	
In Ascensione retta	+ 0. 0. 28. 56, 4
Ascensione retta del pianeta	3. 0. 54. 55, 7

22 Dicembre t. m. 11.^{ore} 55'. 58''

Differenza osservata fra il pianeta e la stella 245. ^{ma}	
In Ascensione retta	— 0. 0. 29. 31, 4
Ascensione retta del pianeta	3. 0. 55. 2, 0

22 Dicembre t. m. 11.^{ore} 55'. 58''

Differenza osservata fra il pianeta e μ dei Gemini	
In Ascensione retta	— 0. 1. 31. 46, 5
In Declinazione	+ 0. 1. 6. 36, 5
Differenza in Declinazione corretta dalla refrazione	+ 0. 1. 6. 37, 7
Ascensione retta del pianeta	3. 0. 54. 57, 9
Declinazione boreale	0. 23. 43. 15, 1
Fatta una giusta estimazione delle osservazioni (1) si han- no per l'istesso tempo	

(1) Vedi *Novi planetæ observationes & theoria* pag. 26.

I luoghi apparenti del pianeta.

{ Ascensione retta	3'. 08. 54'. 57", 5
{ Declinazione boreale	0. 23. 43. 15, 1
{ Longitudine	3. 0. 50. 18, 94
{ Latitudine boreale	0. 0. 15. 11, 8

Il 23 Dicembre tempo medio 11.^{ore} 51'. 55"

Differenza osservata fra il pianeta ed η dei Gemini

In Ascensione retta	+ 0. 0. 26. 7, 6
Ascensione retta del pianeta	3. 0. 52. 7, 2

23 Dicembre t. m. 11.^{ore} 51'. 55"

Differenza osservata fra il pianeta e la stella 245.^{ma}

In Ascensione retta	— 0. 0. 32. 20, 7
Ascensione retta dal pianeta	3. 0. 52. 12, 9

23 Dicembre t. m. 11.^{ore} 51'. 55"

Differenza osservata fra il pianeta e μ dei Gemini

In Ascensione retta	— 0. 1. 34. 36, 2
In Declinazione	+ 0. 1. 6. 36, 7
L' istessa corretta dalla refrazione	+ 0. 1. 6. 37, 9
Ascensione retta del pianeta	3. 0. 52. 8, 4
Declinazione boreale	0. 23. 43. 15, 3

Onde fatta l' estimazione delle osservazioni si avranno per l' istesso tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

{ Ascensione retta	3. 0. 52. 8, 5
{ Declinazione boreale	0. 23. 43. 15, 3
{ Longitudine	3. 0. 47. 44, 18
{ Latitudine boreale	0. 0. 15. 11, 0

La longitudine del Sole per il tempo dell' osservazione del dì 22 Dicembre si ha secondo le tavole del Mayer 9'. 15.

36'. 13", 5, onde in quel tempo era già seguita l'opposizione, e col moto relativo del pianeta dal Sole era stato percorso un arco di 08. 45'. 54", 6.

Il moto del pianeta in longitudine dal dì 22 al 23 Dicembre fu di 08. 2'. 34", 76, onde il suo moto diurno si ha di 08. 2'. 35", 19, col qual moto e col moto diurno del Sole 1°. 1'. 9", 5, il surriferito arco fu percorso in 17.^{ore} 17'. 9", quali sottratte dal tempo dell'osservazione del 22 Dicembre danno l'apparente opposizione per il dì 21 dell'istesso mese a 18.^{ore} 38'. 49" di tempo medio. La longitudine del Sole era in quel tempo 9'. 08. 52'. 10", 7, e perciò la longitudine apparente geocentrica del pianeta nel momento dell'opposizione 3'. 08. 52'. 10", 7.

Per avere la longitudine eliocentrica bisogna correggere la longitudine geocentrica con due equazioni, la prima di -8", 0 per l'aberrazione e nutazione del pianeta (2), la seconda di +1, 0 per l'aberrazione del Sole (3), onde la longitudine vera eliocentrica era 3'. 08. 52'. 3", 7, alla quale aggiungendo 6", 1 si avrà la longitudine nell'orbita per il momento dell'opposizione 3'. 08. 52'. 9", 8.

*Opposizione del nuovo pianeta osservata
l'anno 1782.*

Le osservazioni furono fatte come le precedenti al Quadrante Murale. Il pianeta fu paragonato alle stelle H , η , e μ della costellazione dei Gemini nelle notti dei 22 e 25 Dicembre. Nel dedurne i luoghi del pianeta ci siamo serviti del Catalogo di Mayer per la stella η , e del Catalogo di Bradley per le stelle H e μ avendo riguardo ai loro piccoli moti apparenti dal 22 al 25 Dicembre. I luoghi delle fisse sono descritti per il dì 15 dell'istesso mese.

Dal

(2) Vedi *Observationes siderum habitæ Pisis ab anno 1774 ad annum 1778* pag. 122.

(3) Vedi *Novi Planetæ observationes & theoria* pag. 16 e 17.

Dal Catalogo di Bradlej.

<i>H</i> dei Gemini Ascensione retta	2 ^s . 27 ^s . 44 ⁱ . 16 ^u , 8
Declinazione boreale	0. 23. 15. 36, 5
<i>n</i> dei Gemini Ascensione retta	3. 0. 27. 3, 9
Declinazione boreale	0. 22. 33. 15, 5
<i>μ</i> dei Gemini Ascensione retta	3. 2. 27. 45, 5
Declinazione boreale	0. 22. 36. 37, 8

Dal Catalogo di stelle Zodiacali dell' Ab. de la Caille.

<i>H</i> dei Gemini Ascensione retta	2. 27. 44. 10, 4
Declinazione boreale	0. 23. 15. 38, 6
<i>n</i> dei Gemini Ascensione retta	3. 0. 27. 53, 7
Declinazione boreale	0. 22. 33. 21, 3
<i>μ</i> dei Gemini Ascensione retta	3. 2. 27. 36, 1
Declinazione boreale	0. 22. 36. 41, 9

Dal Catalogo di Mayer.

<i>H</i> dei Gemini Ascensione retta	2. 27. 44. 19, 4
Declinazione boreale	0. 23. 15. 39, 1
<i>n</i> dei Gemini Ascensione retta	3. 0. 27. 0, 6
Declinazione boreale	0. 22. 33. 19, 1
<i>μ</i> dei Gemini Ascensione retta	3. 2. 27. 39, 0
Declinazione boreale	0. 22. 36. 40, 3

Il 22 Dicembre a 12.^{ore} 17'. 17". di tempo medio.

Differenza osservata fra il pianeta ed *H* dei Gemini

Nell' Ascensione retta	+ 0. 8. 16. 50, 8
Nella Declinazione	+ 0. 0. 24. 29, 0
Nell' istessa corretta dalla refrazione	+ 0. 0. 24. 29, 4
Ascensione retta del pianeta	3. 6. 1. 6, 7
Declinazione boreale	0. 23. 40. 5, 9

22 Dicembre 12.^{ore} 17'. 17". *t. m.*

Differenza osservata fra il pianeta ed η dei Gemini			
Nella retta Ascensione	+	0 ^s .	58. 34'. 0", 6
Nella Declinazione	+	0.	1. 6. 47, 2
Differenza nella Declinazione corretta dal-			
la refrazione	+	0.	1. 6. 48, 4
Ascensione retta del pianeta		3.	6. 1. 0, 7
Declinazione boreale		0.	23. 40. 7, 5

22 Dicembre 12.^{ore} 17'. 17". *t. m.*

Differenza osservata fra il pianeta e μ dei Gemini			
In Ascensione retta	+	0.	3. 33. 19, 3
In Declinazione	+	0.	1. 3. 30, 9
L' istessa corretta dalla refrazione	+	0.	1. 3. 32, 0
Ascensione retta del pianeta		3.	6. 1. 4, 3
Declinazione boreale		0.	23. 40. 9, 1

Fatta come nell' altra opposizione l' estimazione delle osservazioni si avranno per l' istesso tempo

I luoghi apparenti del pianeta.

{	Ascensione retta	3.	6.	1.	3, 9
	Declinazione boreale	0.	23.	40.	7, 5
{	Longitudine	3.	5.	30.	36, 0
	Latitudine boreale	0.	0.	18.	48, 9

25 Dicembre 12.^{ore} 4'. 57". *t. m.*

Differenza osservata fra il pianeta ed H dei Gemini			
In Ascensione retta	+	0.	8. 8. 23, 7
In Declinazione	+	0.	0. 24. 44, 5
Questa corretta dalla refrazione	+	0.	0. 24. 44, 9
Ascensione retta del pianeta		3.	5. 52. 40, 5
Declinazione boreale		0.	23. 40. 21, 4

25 Dicembre 12.^{ore} 4'. 57". t. m.

Differenza osservata fra il pianeta ed η dei Gemini

Nell' Ascensione retta	+ 0 ^e .	58. 25'. 32", 1
Nella Declinazione	+ 0.	1. 7. 3, 9
Questa corretta dalla refrazione	+ 0.	1. 7. 5, 1
Ascensione retta del pianeta	3.	5. 52. 32, 7
Declinazione boreale	0.	23. 40. 24, 2

25 Dicembre 12.^{ore} 4'. 57". t. m.

Differenza osservata fra il pianeta e μ dei Gemini

Nell' Ascensione retta	+ 0.	3. 24. 50, 7
Nella Declinazione	+ 0.	1. 3. 45, 1
Questa corretta dalla refrazione	+ 0.	1. 3. 46, 2
Ascensione retta del pianeta	3.	5. 52. 36, 2
Declinazione boreale	0.	23. 40. 23, 3

Secondo la solita estimazione si dedurranno per l' istesso tempo

I luoghi del pianeta.

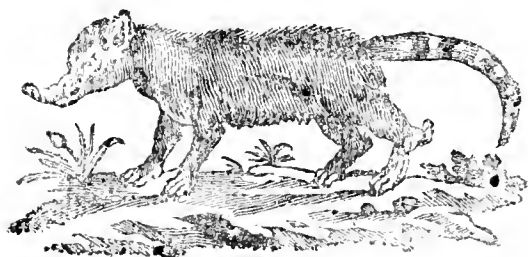
{ Ascensione retta	3.	5. 52. 36, 5
{ Declinazione boreale	0.	23. 40. 23, 0
{ Longitudine	3.	5. 22. 50, 6
{ Latitudine boreale	0.	0. 18. 45, 2

Il dì 25 per il tempo dell' osservazione si trova dalle tavole del *Mayer* la longitudine del Sole 9^e. 48. 24'. 59", 42. Prima dunque che seguisse l' opposizione doveva col moto relativo del pianeta dal Sole descriversi un arco di 57'. 51", 18, il quale secondo il moto diurno del Sole 18. 1'. 10", 9 ed il moto diurno del pianeta 2'. 35", 63 si percorre in 21.^{ore} 46'. 16", onde l' opposizione apparente del pianeta seguì il dì 26 Dicembre a 9.^{ore} 51'. 13" di tempo medio.

La longitudine del Sole si ha per quel tempo dalle tavole 9^e. 58. 20'. 28", 22, e perciò la longitudine apparente del pianeta 3^e. 58. 20'. 28", 22. Per avere la longitudine

Qqqqq ij

corretta eliocentrica si farà uso, come sopra, delle due equazioni, la prima di $-14''$, 27 per l'aberrazione del pianeta, la seconda di $+1''$, 04 per l'aberrazione del Sole, dalle quali si deduce la suddetta longitudine 3° . $58'$. $20''$. $14''$, 99, a cui aggiungendo $7''$, 47, si ha la longitudine nell'orbita 3° . $58'$. $20''$. $22''$, 46 nel momento dell'opposizione, nel qual tempo la latitudine geocentrica era 0° . $18'$. $45''$, 7 boreale.



LETTERA SECONDA

RELATIVA A DIVERSI OGGETTI
FOSSILI E MONTANI.

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI Regio Professore
di Storia Naturale nell' Università di Pavia.

Al Sig. CARLO BONNET, Membro delle più illustri
Accademie di Europa.

Scritta il giorno 12 febbrajo 1784.

§. I.

*Sostanze fossili osservate a Portovenere, e ne' suoi contorni.
Fenomeno sorprendente osservato nella Riviera di Ponente.*

Quanto l'interiore del picciol Borgo di Portovenere, e le rupi attornianti il contiguo golfo dentro alle bocche, sono immuni dalle tempeste, altrettanto ne vanno soggette le parti giacenti al di fuori, battute furiosamente da' colpi di mare, quando imperversano i due formidabili venti, scilocco, e libeccio. Quest'ultimo segnatamente caccia i sollevati marosi con tanto impeto, e a tale altezza contro gli scogli che servono di parapetto e difesa a quell'antica terriciuola, che sembra allora che il mare minacci d'interamente inghiottirla. Dirovvi, Amico illustre e carissimo, d'essermi trovato presente ad una delle più terribili libecciate; e quantunque io mi vedessi in sicuro, pure non saprei rappresentarvi l'orrore, e il ribrezzo, che cagionò nell'agitato mio animo quel non più visto spettacolo. Ho voluto con esatte misure prendere la maggiore altezza, a che sollevansi i fiotti nelle più fiere burrasche, e quando io ve ne parlerò, argomentar voi potrete quanto fuori delle bocche

Qqqqq iij

del golfo si renda formidabile il mare. In grazia dunque della prepotente sua forza le alte rupi sassose sovrastanti a Portovenere dalla parte del mezzodì vengono lentamente corrofe e distrutte, e a un simil guasto soggiaccion pur le tre isole prossime, *Tiro*, *picciol Tiro*, e *Palmaria*, ma distintamente quest' ultima, la quale quanto è agiata e soave a salire dalla parte del golfo, ed è tutta coronata di alberi, e piante fruttifere, altrettanto dall' altra che guarda il mare è deserta, e inaccessibile, e per ogni dove ripiena di precipizj, di ruine, di orrori. E a somiglianti disastri ho pur veduto andar soggette tutte quelle pendici, che nel restante della Riviera di Ponente, e nell' altra pur di Levante ferrano il mare, come buona parte altresì di quell' altre, che inoltransi alle coste della Provenza. E a mio avviso non ha dubbio alcuno, che da queste continue corrolioni guadagnato su la terra in tutti questi luoghi non abbia il mare; e parlando della *Palmaria* che è la più grande e la più eminente di queste tre isole, mi lusingherei di aver dati bastanti, per ragionevolmente inferire che quel lungo e facile pendio, che presentemente ha dentro del golfo, lo avesse anche una volta al di fuori, ma che col lento volger dei secoli sia stato ruinato e distrutto dai violenti colpi di mare. Medesimamente dai riflessivi esami da me fatti su la struttura di queste tre isole crederei di poter far vedere che a' tempi antichissimi non eran già tre isole distinte, siccome sono presentemente, ma sì bene una sola, o a dir meglio una penisola continovata con Portovenere.

Ella è cosa presso i Naturalisti notissima che per ammotamenti di terre, per tremuoti, o per la foga di precipitosi torrenti scoscendono talvolta fino alle fondamenta certi fianchi di monti, per cui svelate rimangono le occulte lor viscere, venendo in tal guisa ad averli quella specie di notomia dentro alla terra, che indarno si farebbe sperata dagli uomini. Tanto il continuo battere dell' onde marine ha prodotto negli altissimi scogli delle due Riviere di Genova, ma sopra tutto nell' isola *Palmaria* ai due fianchi, che guardano Mezzogiorno, e Levante. Quivi è dove un Fisico indagatore adagiatosi in qualche navicello sul mare quando non è agitato da venti, e tenendo gli occhi fissamente rivolti a que-

sti due lati , può soddisfare con piacere gli avidi suoi desiderj . Io al certo ne' diversi miei viaggi terrestri non saprei dire in genere di *stratificazioni* di avere mai veduto oggetto più variato, nè più istruttivo di questo . L' andamento adunque degli strati componenti le grandissime rupi che terminano i suddetti due lati della Palmaria , in ogni parte pressochè verticali, la diversa grossezza di questi strati, la loro figura , la superficie , il mutuo intreccio , la varia direzione con l' orizzonte, son tutte cose ch' io mi riservo a descrivere nella mia Opera . Quivi farò anche parola di varie buche, ed ampie caverne, nel vivo sasso prodotte dall' empito dei marosi, atte esse pure a fornirci utili cognizioni, mirandole ben bene con l' occhio, e ponderandole con la mente . Presentemente parlerovvi soltanto della natura di questi strati , e dirovvi non averne trovato pur uno che calcare non sia . Che anzi tutta l' isola suddetta , che ha il giro di tre miglia all' incirca, non è che un masso di somigliante materia, vestito soltanto dalla parte che mira il golfo di una crosta terrosa , della grossezza di pochi piedi, ed essa pure in buona parte calcare, dentro cui vivono, e moltiplicano molti vegetabili di varia specie, e grandezza . Solamente questo gran masso non può dirsi formato d' un pezzo solo , ma d' un incredibile numero di suoli lapidei, o tavolati o strati che dir li vogliamo, combaciantisi strettamente insieme, senza che mai o quali mai intramettano strato alcuno di rena o di terra . E ciò ch' io dico della calce, e della stratificazione , onde risulta la Palmaria , ha luogo nè più nè meno per l' altre due isole , anzi per gli scogli che circondano il golfo, e per la più parte di quelli che sono litorali alle due Riviere . Soltanto a poca distanza da questo verso Ponente sollevasi un' alta rupe alle sponde del mare, composta di scissile pietra margacea, nella quale domina l' argilla , e che è commendabile per due singolarità, l' una di avere alla superficie bellissime macchie dendritiche , l' altra di rinchiudere delle marcasite tessulari .

Il marmo di Portovenere è uno di quelli che è nominato con lode in Italia , ed anche fuori . E ciò meritamente non tanto pel nobile lustro che dal pulimento riceve, quanto per le vaghe dorate macchie, che spiccano mirabilmente su d' un

fondo morato . Cotal marmo si cava presentemente in due luoghi, all' esterno canto della Palmaria a Levante, e in terra ferma poco lungi dal golfo, e da un Munistero detto le *Grazie* . Ommettere non doveva d' istituire i dovuti esami intorno a queste due cave, nè lascierò a suo tempo di porli sotto l' occhio del pubblico . Del rimanente non sono questi i due siti unici, dove si può estrarre un tal marmo . Moltissimi altri luoghi di quest' isola ne abbondano . Lo stesso è pure di più parti del vicino continente, e il medesimo Borgo di Portovenere, piantato tutto sul nudo scoglio, può dire di averlo dentro al suo seno . Di fatti molti strati dello scoglio non sono che di un tal marmo, con questo solo divario che è privo di quelle macchie giallo-dorate, o che non è tanto ricco di esse . Generalmente poi il marmo denominato di Portovenere non è come tanti altri marmi che formano monti interi o pezzi di monte, senza che mescolati vadano a materie straniere . Quello, di cui parlo, trovasi per lo più in compagnia d' una rozza pietra calcare, più dura di lui, e d' un cenerognolo scuro, per liberarlo dalla quale, e così poterlo aver puro, fa sovente d' uopo di molta spesa .

Alcuni screpoli, e spaccature degli scogli calcari fin qui menzionati, gli ho trovati riempiti d' uno spato stalattitico, parte amorfo, e parte cristallizzato, ignoto affatto a que' popolani, e che per la lucentezza che nel pulirlo riceve, per la nobiltà dei colori, e per la solidità e union delle parti, si rende prezioso per varj lavori, come per mezzo d' un valente Artefice l' ho io potuto chiaramente vedere . E questa qualità di pietra parasitica suole prodursi in que' luoghi, dove si depositano o scorrono l' acque piovane, pregne di particelle calcari corrosive da' mentovati scogli, le quali particelle sciolte quivi appunto dalle suddette acque, danno origine a quello spato, alla generazione del quale è facile che concorra eziandio un principio acido vitriolico,

Era cosa da non trascurarsi il cercare se quella parte di scogli che sta sotto al mare è di natura diversa dall' altre che gli soprastanno, ed ho trovato che no, altro mai non essendo le parti inferiori all' acqua marina che una continuazione delle superiori . E questo pur si verifica nel caso che
lo

lo scoglio di verticale che era sopra del mare , piega al di sotto di esso e viene a farsi pressochè orizzontale .

Tutte le diligenze da me usate per vedere se quella catena di scogli , che circonda il golfo e che forma le tre isole , imprigiona qualche testaceo o crostaceo fossile , ovvero qualche impronto di essi , riuscite sono infruttuose . Il rimanente altresì degli scogli littorali della medesima Riviera di Levante , che ho potuto visitare , mi ha offerta la medesima sterilità . Ma fu di un tal genere di corpi fossili quanto mai da questa Riviera differisce l'altra di Ponente ! Visitata avendola l'autunno del 1781 , ho veduto non senza ammirazione , che cominciando alcune miglia al di sopra del Finale di Genova , camminando verso Ponente il restante di quella Riviera , anzi andando sino al Forte di Monaco , che è quanto dire scorrendo un tratto di paese di 70 e più miglia , tutte quelle montagne finitime al mare , anzi quelle medesime che alquanto s' inoltrano nel continente , contengono testacei . Sebbene che dissi contengono ? Oltre ai testacei che quivi si conservano interi , se con lente si esami ni la pietra componente que' monti , trovasi in tutto o quasi in tutto risultare da un minutissimo tritume o disfacimento di essi . E questa pietra *lunachella* per essere compatta anzi che no , serve in que' paesi per le fabbriche private e pubbliche , e si estrae da una montagna vicina al Finale , nella quale sono le cave . Ho esaminato queste cave che sono antichissime , e che si approfondano nel seno del monte , e le riputerò meritevoli d' essere con qualche dettaglio descritte . Credereste ? Tutto il Finale , formato di due lunghe borgate , tutti i villaggi circonvicini , una porzione della città di Genova per le osservazioni da me fatte , non sono in massima parte fabbricati che di questa pietra , che è quanto dire di testacei . E riflettete che ad onta dei tolti tanta è la immensità dei testacei che rimangono , che sembra essere stato levato da un gran monte un granello di arena . Ma voi facilmente sarete curioso di sapere da me quali sono le specie di questi testacei fossili , e sicuramente la mia risposta vi sorprenderà , quando io vi dico , ridursi tutti a una specie sola . Egli è adunque un pettine di mediocre grandezza , e questo d' una qualità sola , che parte intiero , parte ridotto in minuzzoli compone tutta quell'e-

stension di montagne, senza che trovato io v'abbia mai fram-
mischiato verun testaceo o crostaceo, malgrado le più minu-
te mie diligenze nell' esaminar questa pietra. Di questa sola
specie di pettine sono adunque formate in massima parte le
fabbriche del Finale, quelle de' paesi circonvicini, e non po-
che di quelle di Genova. Ma come mai una specie sola di
conchiglia, che è di origine marina, si è potuta unire in
numero sì prodigioso, sì immenso, che appena ce lo possia-
mo figurar col pensiero? E più ancora crescerà in voi lo stu-
pore s' io vi dirò essere questa fatta di conchiglia viva del
tutto sconosciuta a' pescatori del mare Ligustico, e di quel
di Provenza. Lascio alla vostra gran mente il meditare su
questo astrutissimo fenomeno, che finora mi sembra unico fra i
tanti riferiti dai Naturalisti intorno ai corpi *marino-montani*.

§. II.

*Maravigliosa Fontana d' acqua dolce che gorgoglia in mezzo
all' acqua salsa del golfo. Ricerche intorno alla sua ori-
gine.*

Questa fontana che è distante da terra 65 piedi, e dalla
Spezia un miglio all' incirca, si solleva di alcuni pollici dal
livello del mare, formando una specie di colmo circolare del
diametro di 20 piedi, il qual colmo è per ogni dove ripie-
no di gorgogli, eziandio quando il mare è quietissimo, e la
sua acqua si osserva sempre torbidiccia, ma più ancora ne'
tempi piovosi, a differenza della circostante che è sempre chia-
ra. In grazia di questi gorgogli non è possibile che una sem-
plice barca o un navicello possa arrestarsi nel centro del col-
mo, venendo subito cacciato alla circonferenza. Sentirete pe-
rò l' artificio da me immaginato, e per cui mi è riuscito di
star fermo a mio talento nel bel mezzo della fontana, giac-
chè troppo mi premeva di esaminarla a dovere, così alla su-
perficie, che nel suo fondo. Adunque gustata detta fonte al-
la superficie non è niente dolce, ma solamente meno salsa
che la circostante acqua marina. Scandagliata la sua profon-
dità, ella è di piedi $38\frac{1}{2}$, e il piombino giunto che sia in
vicinanza del fondo, si sente tremare insieme alla cordicella,

a cui resta appiccato, il qual tremore siccome non si manifesta in altri luoghi, così è chiaro che viene prodotto dall' acqua della fontana, che scaturendo dal soggetto suolo, lanciassi con impeto all' insù. Ma se l' acqua della fontana alla superficie era meno falsa, dove cioè non poteva non essere grandemente mischiata alla marina, questa era una presunzione troppo forte per credere che nel fondo esser dovesse interamente dolce. Ad accertarsi però di questo facea di mestiere trarre da quel fondo qualche porzione di acqua, e recarla fuori del mare, senza che si mescolasse punto all' acqua marina. Ma come giungere a conseguire ciò? Parlerovvi a suo tempo della macchinetta felicemente inventata, mercè cui ho potuto aver l' acqua fontana nello stato medesimo in cui è quando sgorga da quel fondo, e dirovvi adesso di averla trovata torbidissima, anzi fangosa, ma dolce. Vi aggiungerò due altre circostanze, l' una sì è che quest' acqua dolce in agguaglio a quella del mare è freddissima, il che nasce per venir di sotterra; l' altra che la macchinetta che era di latta, restò una volta, quando toccava il fondo, schiacciata in un lato, la qual cosa a mio avviso non potè accadere, che dal violento urto dell' acqua dolce sboccante dal fondo, che cacciò la macchinetta contro qualche pietra o pezzo di scoglio.

L' illustre mio Concittadino, Antonio *Vallisneri* nel venire da Genova nell' anno cinque di questo secolo visitò questo mirabil fonte, ma essendo egli di passaggio null' altro osservò se non se que' superficiali gorgogli, la cui acqua al suo gusto gli parve dolce; ma il vero è, come già dissi, e come ognuno che passa per quel luogo se ne può accertare, che per la falsizza sua non si allontana di molto da quella del mare. Fu anche condotto quel celebre Naturalista alla visita d' una caverna sotto d' un monte fra Reco, e la Spezia, dentro la quale que' coloni gli fecero credere che venivano ingojate tutte l' acque de' luoghi circonvicini, che a loro detta erano le generatrici della più volte mentovata fontana. Ma recatosi egli sul luogo, ben tosto si accorse dell' inganno, giacchè in quella caverna non

mettea foce che un rigagnolo poverissimo d'acque (a). Non so se l'amor proprio m'inganna, dicendovi ch'io crederei d'essere stato lo scopritore benavventuroso di un sì ammirando fenomeno. Certamente due grossi torrenti, situati a' fianchi d'un monte non più di tre miglia distante dalla Spezia, e per opposte direzioni unentisi in uno, e precipitanti le loro acque in un ampio baratro inaccessibile, riboccante mai sempre delle medesime, nelle vampe eziandio più cocenti del follione, sembrano essi (per le ragioni che allegherò altrove) somministrare l'incessante alimento a quella rigogliosa capacissima polla, che attraverso del mare s'inalza.

Poche miglia distanti da questo baratro nel territorio di Casale si trovano alcune miniere di magnesia, che per lo spaccio che se ne fa a Livorno, e a Venezia, sono di qualche utilità a' proprietarj, ma che loro esser potrebbero incomparabilmente più proficue se avessero un po' più d'arte nel farle cavare. E questa pietra che si trae pure da altri luoghi adjacenti, da me esaminata ne' siti nativi, e di cui non lascerò di ragionare, si può dire che sia l'unico minerale finora conosciuto in que' paesi.

§. III.

*Grotta sopra Carrara; altra in vicinanza
di Equi, osservate.*

Uscendo dalla bocca più grande del golfo, posta tra l'Isola Palmaria, e le radici delle Panie, ed andando terra terra si presenta a sinistra dopo il cammino di 12 miglia un inclinato spazioso piano terminante col mare, ricco in ogni parte di piante fruttifere, e dove una volta si ergeva la celebre Luni, della quale antichissima città si può dire come di tante altre distrutte che *seges est, ubi Troja fuit*, non restando di lei che i ruinosi avanzi d'un ignobile Anfiteatro. A riserva di questo monumento d'antichità, che con piacere è stato da me diligentemente esaminato, e di cui non crederò

(a) Vallisner. Oper. in fog. T. III.

assatto alieno al mio istituto il dar qualche conto, per tutto quel piano, andando anche fino a Carrara, non ho trovato cosa che allettar potesse l'Osservatore. Solamente mezzo miglio al disopra di questa fiorente città prima di arrivare alle cave de' marmi verso la metà d'una pendice sassosa si presenta l'angusto foro d'una nera caverna, che dopo l'averla io visitata da cima a fondo con uomini avanti che portavano fiaccole accese, la trovai sì ricca di bizzarrie, di maraviglie, di fenomeni istruttivi, ch'io dir non saprei se vi sia altro luogo sotterraneo tanto ferace per l'Orittologo d'interessanti notizie. Voi sapete quanto è salita in fama la Grotta di Antiparo, descritta prima d'ogni altro dal Sig. di *Nointel*, ed in seguito più filosoficamente dal celebratissimo *Tournefort*, resa anche da lui più famosa per le credute vegetazioni di marmi colà dentro scoperte. Ma o io m'inganno a partito, o alla grotta di Levante è di molto preferibile la Carrarese, che ha di lunghezza un miglio e un quarto sotterra, che si dirama in più altre grotte subalterne, che ora si restringe in angusti viottoli, ora si allarga in più stanze, e grandiose sale, che presenta un'immensità di bellissime pietre acquee d'ogni grandezza, d'ogni forma, d'ogni maniera, che nel vivo fallo a un'enorme profondità del monte manifesta il corso, la varietà, la natura degli strati componenti, dentro cui scorrono romoreggiando due torrenti, e che termina in un picciol lago d'acqua limpidissima. Credo al certo ch'io non farovvi cosa discara quando vi metterò sott'occhio particolarizzati tutti questi fenomeni. Nè io allora vo' tacervi i pericoli che incontrai nel visitare questa memorabil caverna, per superare i quali dovetti più d'una volta appendermi a funi, e così appeso passar sopra profondi abissi, ed orribili precipizj; e per questo appunto io non trovai che pochi uomini arditi, ed assuesatti ad affrontare i pericoli dentro le cave de' marmi, che volessero essermi a compagni in questo mio sotterraneo viaggio.

Il prelodato *Vallisneri* nell'elaboratissimo suo *Trattato delle fontane* parla di due ammirabili caverne, che per essere non molto distanti dal Carrarese m'invogliai di osservare, anche per vedere se da quel tempo a questa parte, che è quanto dire dopo 78 anni, foggiate erano a qualche considera-

bile cangiamento. La prima vien detta la *Buca d' Equi*, situata nel territorio di Fivizzano lontana 9 miglia circa da Carrara. La seconda si appella la *Grotta che urla*, poco sopra Forno Volastro. Della prima cade ora il dritto di ragionare, della seconda parlerò più opportunamente in altro luogo di questa lettera. Dopo adunque l' aver fatte le necessarie osservazioni dentro alla mentovata grotta di Carrara, mi portai a visitare quella d' Equi, che è un picciolissimo villaggio sepolto come in un baratro fra orride montagne, e salutato appena per due ore nell' invernale stagione dal sole. Sebbene recatomi sul fatto, ed esaminatolo con attenzione, tosto m' avvidi che tanto esso discorda da quello che ce ne dice il Naturalista di Reggio, ch' io crederei di far torto ad un uomo sì diligente, sì oculato, sì sagace, s' io supponessi che quella grotta osservata egli l' avesse co' proprj occhi; che piuttosto mi farò a pensare che attenuto siasi alle relazioni di qualche inesperto. Lasciata però al presente la descrizione della medesima io qui altro non farò che toccare le irriflessioni, e gli sbagli che si leggono nel libro del *Vallisneri*. Egli ci dice in primo luogo che detta grotta è distante da Equi mezzo miglio, quando ne è lontana al più cento piedi. Nè vi è pericolo di equivoco, in quanto che vi sia forse colà più d' una grotta, mentre oltre al non esservene che una sola, e al portare anche adesso il medesimo nome, con cui fu chiamata dal *Vallisneri*, questo Fisico nel fissar la montagna dentro cui s' interna, e nel descriverne la bocca o l' ingresso, viene con troppa evidenza ad individuarla per quella stessa che mirasi anche al dì d' oggi. In secondo luogo l' interna forma, e configurazione io l' ho trovata in buona parte diversa da quella che viene da lui rappresentata. Terzo ei ci dice che da una crepatura interna di quello speco esce un fonte d'acqua perenne, da cui riceve il primo alimento il fiume Lucido; quando tal crepatura, che ci esiste anche adesso, non manda fuori acqua che dopo parecchi giorni di pioggia, e quella mattina ch' io la visitai, era asciutissima, non ostante che piovuto fosse tutta la notte. Detto fiume poi ho io veduto che tragge la sua origine da tutt' altro luogo. Finalmente egli è falso che in certi tempi nuvolosi, e siroccali esca dalla bocca della caverna un profluvio d' acque, come

ci fa sapere 'il chiarissimo Autore. Di quest' ultimo fatto, come altresì che l' acqua non esca da quella capace crepatura se non se dopo lunghe non interrotte piogge, sono stato assicurato da più persone di Equì, da me interrogate, e degnissime di fede, alcune delle quali decrepite d' età, ma ci mente fresca, mi hanno attestato che a loro memoria, e a quella ancora de' loro avoli l' interior forma della grotta è sempre restata la stessa; e però non si può sospettare che dopo la relazione di quel Fisico sia nato da questa parte cangiamento essenziale.

§. IV.

Osservazioni instituite alle cave dei marmi di Carrara, e su le Panie.

Non avrò difficoltà alcuna di farmi a parlare di queste rinomatissime cave, non ostante che ne' suoi *viaggi della Toscana* v' abbia impiegato un intero capo il chiarissimo Sig. *Targioni*. Se questo Naturalista le avesse esaminate egli stesso, avrei forse creduto opera perduta l' entrare io in questa indagine. Ma chiunque leggerà quel capo si avvedrà che non s' avvolge che d' erudizione, e di quanto su questi marmi era stato detto da *Strabone*, da *Livio*, da *Dante*, e da altri antichi Scrittori. Oltracciò non mi è noto che neppure altri Fisici si sieno espressamente portati sul luogo per esaminare le suddette cave. Ho adunque creduto essere opportuno l' entrare io in questa disamina; e però su quelle asprissime montagne vi ho impiegato due settimane, non d' altro quasi mai occupato che nell' osservare non tanto que' luoghi dove attualmente si cavano marmi, quanto quegli altri moltissimi, in cui si cavavano una volta, e che ora sono stati abbandonati; e ciò per avere io più termini di confronto, onde giungere a conoscer meglio l' impasto, diciam così, e la struttura di quella grand' Alpe. Mi riserbo pertanto nella mia Opera a ragionarvi di ciò che di più importante è stato da me notato nelle suddette cave; e qui non farò che accennarvi alcuni fatti, e singolarità, non immeritevoli, per quanto io giudico, de' savissimi vostri riflessi.

Se si considera quell' ampio tratto di Panie, che comincia poco sopra Carrara, e che in dirittura si estende fino all' altissima loro sommità (che è appunto quel gran seno, di dove si traggono i marmi) si trova tutto calcare, e tutto d' un masso solo, non avendo strati terrosi frapposti, ed essendo anche quasi per tutto ignuda la sua superficie. Solamente la pietra calcare formante quell' immenso scoglio è d' indole apparentemente diversa, in quanto che in molta parte è di grana grossolana, e d' un colore sudicio che nel cenerino rosfeggia; e questa parte è poco atta agli usi della Società, quando l' altra per l' opposto è di grana più o meno fina, riceve pulimento, e lucentezza, ed è anche commendabile pel colore: e di questa ultima pietra risultano i diversi marmi Carraresi, i cui principali sono lo *statuario*, il *bianco ordinario*, e il *bardiglio*, che ha colore più o meno turchino, quantunque poi ciascheduno di questi tre marmi comprenda sotto sè moltissime varietà. Questi marmi diversi sono tante volte con distinzione separati l' uno dall' altro, quantunque fra loro contigui, così che lo statuario, per somiglianza d' esempio, non va a confondersi col bianco ordinario, non ostante che lo strato che compone il primo sia in immediato contatto con lo strato che forma il secondo. Ma altre volte, e queste non rare, lo statuario, e il bianco ordinario compongono uno strato unico, e solamente il primo a poco a poco e per gradi insensibili degenera nel secondo. Così voi dite del bardiglio comparato a questi due marmi; e per addurvi un esempio notissimo, si osservano bene spesso ne' marmi Carraresi presso a poco quelle mescolanze fra loro, che noi veggiamo ne' colori del prisma. Per questa ragione, e per altre che alleggerò altrove, io sono d' avviso che i nominati tre marmi non formino realmente che una qualità sola di marmo, dividendesi poi in più varietà. La pietra di grana grossolana soprammentovata (che chiamerò *gregaria*) inceppa sempre, e soventemente anche avvolge, e seppellisce i marmi. Quindi è che per giungere alla verace vena del marmo fa di mestiere il più delle volte con nuire far balzare in aria uno strato di molti piedi di pietra gregaria. Per altro dalle osservazioni da me fatte crederei d' essere fonda-

to a credere che il nocciolo di quel gran tratto di Panie sia tutto o quasi tutto marmoreo.

Opinano diversi Autori che i marmi si riproducono, e che alcune cave di Carrara, esauite a' tempi antichissimi, si sono in seguito di nuovi marmi riempite. Appoggiano singolarmente questa loro opinione all'essersi trovati come imprigionati in alcuni marmi Carraresi degli scarpelli, de' picconi, de' martelli, ed altrettali istrumenti, onde si servivano i Romani per queste cave (a).

Non contento di avere interrogato que' cavatori, e più persone di Carrara versate in queste materie, che concordemente attestato mi hanno di non avere mai sentito parlare della scoperta di tali istrumenti, nè di avere mai veduto marmi colà riprodotti, ho voluto recarmi in persona alla visita di tutte quelle cave, che da un tempo più o men lungo sono state abbandonate. Si trovano queste abbondantemente in diversi luoghi della montagna, segnatamente sotto alcuni prominenti ciglioni, ed è facile il distinguere quelle che sono antichissime, e che si lavoravano al tempo de' Romani, dall' altre di minore età, e da quelle eziandio che sono state lasciate da pochi secoli in qua. Ma a dir vero que' seni, quelle cavità, quei guasti che si fecero allora nell' interno del monte, e che ci nacquero in grazia de' cavati marmi, vi si trovano anche al presente, senza che ivi appaja pure indizio, pur segno di marmo riprodotto. In alcuni di questi seni, di questi vuoti esistono antichi rimasugli di statuario, di bardiglio, di bianco ordinario, insieme ammonticellati e confusi; ho fatto smuovere diversi di tai rimasugli, e presi tra mano, e attentamente considerati, non gli ho veduti punto avvolti da materia marmorea rigenerata, ma quelle rotture, que' piani, quegli angoli che ricevettero una volta da' martelli de' cavatori vi si trovano pure gli stessi presentemente. E però in forza di queste mie osservazioni io non posso accordare la riproduzione de' marmi Carraresi. Diffi Carraresi, non negando io che si possano formare altrove,

Tom. II.

Sffff

(a) Baglivo. Vallisn. Waller.

e che di fatti si formino nuovi marmi, a quel modo che si forman di nuovo altre pietre. In più d' una cava abbandonata mi si è offerto un fenomeno, che potrebbe forse spiegare come dentro alla pietra si sono trovati degli strumenti destinati ai lavori de' marmi, in supposizione che il fatto sussistesse. Diverse adunque di queste cave in que' siti dove entrano l' acque piovane, sono intonacate da una dura crosta lapidea, più o meno grossa, rotta la quale, si trova che tante volte rinchiude corpi forestieri, come schegge di marmo, o pietre d' altra qualità. Quando adunque cominciò a formarsi quella crosta petrosa, se in luogo di tai corpi vi si fossero abbattuti i mentovati strumenti, non v' ha dubbio che questi nel modo stesso stati farebbero quivi entro imprigionati. Ma basta l' avere occhi per accorgersi subito, che quella prodotta sostanza crostosa è tutt' altro che marmo, essendo essa interamente stalattitica.

Malgrado le molte e diligenti indagini da me instituite, non ho mai potuto scorgere verun segnale di corpi marini, tanto ne' marmi Carraresi, quanto nella pietra gregaria involgente. Ne' primi però vi ho trovati due altri corpi stranieri, che debbono interessare di molto il naturalista *Litologo*. Il primo si è una pirite cristallizzata, o sia marcasita, che rompendo il marmo statuario vi si trova dentro. Non alligna però in tutte le cave d' un tal marmo. Che anzi si può dire non esservene che una sola che ne contenga, distante tre miglia da Carrara in luogo chiamato la *Rugeta*. Questa marcasita, che è un solfo mineralizzato col ferro, che è d' un giallo aperto, e che percossa con l' acciaio, manda copiose e strepitanti scintille, rade volte è tessulare, o sia a sei faccie, ma d' ordinario ha dodici o quattordici faccie, ed anche di più. I pezzetti più grandi sono di linee $3\frac{1}{2}$, e i più piccioli addimandano la lente per esser veduti. Tra i più grandi poi, e più piccioli v' ha una serie pressochè infinita di grandezze diverse. Ed ogni pezzetto, picciolo o grande ch' e' sia, si scorge sempre più o meno incastrato nel marmo, e talmente da esso stretto e ferrato, che volendolo trar fuori, tante volte si rompe. Questa marcasita non esiste mai nelle parti solide del marmo, ma bensì dov' egli ha qualche pelo. Se adunque scoperto uno di questi peli o capillari aper-

ture, si planterà in esso lo scarpello, e si farà forza, il marmo si dividerà in due, e le due faccie che appariscono si veggon più o meno ricche di questi lucenti cristalletti piritosi. Osservate poi con qualche attenzione le faccie, vi si scoprono in più luoghi delle picciole fossette, o a dir meglio delle impronte angolari, che erano come le custodie dei cristalletti, i quali si sono staccati da una faccia, e rimasti sono attaccati all' altra, per essere in questa più profondamente impiantati. E che veramente le suddette impronte dessero ricovero a que' cristalletti piritosi, apparisce ad evidenza unendo insieme le separate faccie, giacchè essi allora vi si vanno di bel nuovo a piantar dentro. La conseguenza di questi fatti voi vedete ch' ella è manifestissima, cioè a dire che la pirite cristallizzata preesisteva al marmo formato, e che questo marmo dappprincipio era fluido, o almeno una tenerissima pasta.

Per quanto sono stato assicurato da' Possessori di quella cava, non sono più di 20 anni, che ivi si è cominciato a scoprire questa pirite. E siccome è bellissima, ed è pur tale il marmo a cui va unita, così con tal marmo ho fatto lavorare alcune scatole che non possono esser più nobili,

Oltre all' indicata cava dello statuario, anche il bardiglio contiene un simile minerale, ma estremamente rari sono i pezzi di questo marmo, in cui si ritrova.

L' altro genere di corpi forestieri, che si osserva dentro a' marmi Carraresi, sono i cristalli di rocca. Voi sapete che quando sono aderenti alla loro matrice, questa ordinariamente è silicea, oppure quarzosa; e però si chiamano anche cristalli quarzosi, e rarissime volte si trovano radicati su base calcare. Per esser dunque di questa ultima natura la base de' cristalli, di cui entro adesso a parlare, si rendono essi presso i Naturalisti molto stimabili. Ma hanno altre qualità che grandemente ne accrescono il valore. Di una immensità di cristalli di rocca di fatte diverse, che si trovano in questo pubblico Cesareo Museo, venuti di Germania, dall' Ungheria, dalla Svizzera, e da altre parti, quantunque in sè pregevoli, perchè la più parte trascelti, tuttavia non ve n' è uno che a questi cristalli di Carrara comparare si possa. Crederò adunque prezzo dell' opera il farne nel mio Libro una

dettagliata descrizione. Ma accade a questi cristalli quel che si è veduto accadere alla pirite, voglio dire che il solo marmo ordinario bianco li rinchiude, anzi una sola cava di questo, chiamata la *Fossa dell' Angelo*, distante due miglia e mezzo da Carrara. Ed è puro accidente il trovarne qualcuno in altre cave. Questi cristalli non si veggono mai alla superficie del marmo, ma sempre nel suo interno, costantemente però in certi determinati siti, e non in altri. Adunque le parti interiori che sono solide non ricettano mai i cristalli di rocca, ma quelle sì bene che sono vuote. Dove adunque esistono delle cavità, quivi è che si scoprono gl' ingemamenti cristallini, con questa impreteribil legge, che ogni pezzo o guglia di cristallo è sempre piantata con una estremità su la superficie della cavità, nè se ne trova mai una che staccata e libera sia. Di questi fatti non solamente sono stato assicurato da quelli che lavorano in questa cava, ma dagli occhi miei stessi, quando espressamente ho fatto spezzare molti e molti grossi pezzi di questo marmo. Ho ben veduto esser vana la credenza di que' cavatori che vogliono che questi cristalli di rocca sieno teneri finchè stanno sepolti nel marmo, e che allora indurano, quando rotto il marmo restano esposti alle impressioni dell' aria. Imperocchè quella durezza che hanno dopo, l' avevano egualmente nel momento che sono rimasti schiusi, e questo è troppo conforme alle leggi della cristallizzazione.

§. V.

Carrione, e Frigido esaminati.

Sono questi due grossi torrenti che scorrono il primo dentro Carrara, il secondo rasente Massa. Vien formato il Carrione da due torrenti subalterni, l' uno detto il canale di Torano, l' altro il canale di Bedizano. Siccome il canale di Torano serpeggia nel fondo di alcune gole, i cui lati abbondano di marmi Carraresi, così nel visitar questi mi si è aperta l' opportunità di osservar gli effetti che produce il sotto-corrente canale, uno de' quali non voglio qui lasciare di riferirvi. Riguarda esso la rotondità che acquistano dalle sue

acque quelle schegge , e que' tritoli di marmo che dentro vi caggiono . Il chiarissimo vostro Sig. Nipote , quegli che pe' nobili suoi ritrovamenti è sì benemerito della Fisica , e della Storia Naturale , il Sig. di *Saussure* , nell' eccellente sua opera de' *viaggi Alpini* fa vedere che la rotondità d' una moltitudine di pietre non è naturale ad esse , ma nata in grazia d' essere state rotolate dall' acque dentro al letto de' torrenti , e de' fiumi ; conciossiachè dove questi hanno l' origine prima , quivi le pietre sono angolose , ma rotolate dall' impeto dell' acqua ne' luoghi più bassi , cominciano a perder gli angoli , ed in progresso si fanno rotonde . Oltre l' avere io veduta tal verità in moltissimi luoghi delle spiagge del Mediterraneo , l' ho toccata con mano in que' pezzi di marmo , che o per la picciolezza , o per la cattiva qualità rigettati da' cavatori a cader vanno nel canal di Torano . Molti di questi pezzi sono dapprima di figura piatta , hanno i lembi angolosi , e quivi sono pieni di punte . Ma dopo l' avere viaggiato alquanto lungheffo il letto del canale , quelle punte , e que' lembi cominciano a sinussarsi , e perduto nel tempo stesso a poco a poco quel piatto che avevano , acquistano i pezzi forma rotonda , così che non prima di venir trasportati dal torrente dentro la città , sono già quasi tutti divenuti globosi .

Questa osservazione mi ha servito di lume per un' altra . Dall' incessante cavar de' marmi per tanti secoli nel Carrarese , ne è venuto che alcuni fianchi di monti per esser loro mancate le fondamenta sono rovinosamente precipitati , e quindi nate ne sono delle altissime verticali rupi , come si osserva nel *Polvaccio* , che è una delle più grandiose cave di bellissimo marmo statuario che vanti il paese . Ora è stato da me trovato , che dentro ad alcune di queste sdrucite rupi , non d' altro composte che di marmi , e di pietra gregaria , vi sono incastrate più file o serie di ciottoli , diversi de' quali avendo io potuto estrarre di là , e conseguentemente esaminare , ho conosciuto che sono di natura marmorea , e somigliantissimi ai fluitati nel Carrione . Vi sono adunque tutte le apparenze che in que' luoghi , che sostentano adesso sopra di sè intere montagne , scorresse una volta qualche fiume o torrente .

Il fenomeno delle pietre ritondate, che presenta il Carrione prima d'entrare in Carrara, viene offerto dal Frigido al di sotto di Massa. Quivi è adunque dove il suo letto è ripieno di ciottoli ritondi, altri gregarij, altri marmorei, entrati dentro di esso al di sopra della città, e aventi allora diverse irregolari figure non senza più angoli, e punte. Ma questo torrente in vicinanza del luogo delle pietre ritondate presenta una singolarità, che è quella di seppellirsi, e perdersi tutto dentro alla ghiaja, rimanendo al di sotto il suo letto interamente asciutto, e tornando poi a farli vedere con le sue acque, quando è presso a metter foce nel mare. *Tinnelli* si appella quel sito dove il Frigido si nasconde sotterra, o almeno dove si nascondeva, quando la prima volta lo visitai in ottobre, giacchè essendo stato da me visitato dappoi, si nascondeva allora più basso; e ciò nasceva dalla maggior copia di acque che conduceva per piogge cadute. Che anzi se queste sono diurne, e veementi, il suo corso continua scoperto fino al mare.

Ma se il Frigido in certi tempi si occulta, e si perde sotterra, in qualunque stagione dell'anno sbuca di sotterra. Adunque cinque miglia circa sopra Massa da una gola di monte scappa rigoglioso e spumante un grossissimo fonte perenne, che dà la prima origine al Frigido. A ragione chiamato viene con tal nome, poichè in estate messe la mani dentro all'acqua del fonte nel sito dove sgorga dalla terra, si sente freddissima. Immerso avendo io in essa il termometro reauriano, discese fino a' gradi $6 \frac{1}{4}$ sopra la congelazione, quando nell'atmosfera all'ombra era a gradi 20.

§. VI.

Osservazioni intorno all'origine delle fontane.

Pare che più non possa mettersi in dubbio che i fonti, e i fiumi derivano immediatamente dall'acque piovane, e dalle nevi squagliate. Alcuni dotti Francesi, ma in ispezieltà il celebratissimo mio concittadino *Vallisneri* ha dato tutto il peso a questa sentenza per le osservazioni da lui fatte su le montagne più alte degli Appennini di Reggio. Più anni addietro

in un mio viaggio montano intrapreso in altra parte degli stessi Appennini ebbi la compiacenza di confermare la stessa verità, come apparisce da due mie Lettere relative a questo argomento impresse nella Raccolta Calogeriana. Dirovvi di più che per Superior commissione essendomi io recato nel 1772 su le montagne di Como per far ricerche di naturali prodotti ad uso di questo pubblico Reale Museo, non cessai di far novelle osservazioni intorno all'origine di quelle moltissime fontane, che unitesi in rivi e in torrenti vanno a scaricarsi in quel lago. Sopra tutto saper volli dove esse ricevevano il primiero alimento, e trovai che questo veniva loro per lo più somministrato, o da acque impaludate dentro ad affossamenti, a vasche, ed a buche, o da vive nevi, e da ghiacci, che ne' profondi burroni, e in più sommità di quelle alpestri montagne si conservano in parte, nei calori eziandio della più infocata stagione. Analoghe osservazioni nel 1781 sono state da me instituite su diverse montagne del Piemonte, della Savoia, e della Svizzera. E tanto le prime che le seconde crederò bene di far pubbliche a maggiore confermazione del vero. La mia imparzialità m' obbliga però a confessare di aver trovato più fonti in que' siti dove non sono ricettacoli, e vivaj di nevi o di acque, e di averle vedute fluire ne' tempi eziandio, che in que' luoghi, e negli altri circonvicini regnava la maggior siccità. Tale si è una fonte perenne all' isola Palmaria, molte fonti al di sotto della Bocchetta per venir da Genova a Pavia, una grossa polla pochi passi distante da Equi, e due altre pure larghissime, l'una che in parte forma il canal di Torano, l'altra che dà origine al Frigido. A spiegare che queste sorgenti tutte ricevono la materia dal cielo, non vi sono a mio avviso, che due maniere, o supporre che da paesi rimoti sieno generate, dove frequenti cadon le pioggie, e che l'acqua per sotterranei canali sia tramandata a questi siti, di dove sbucan le fonti; oppure che in vicinanza di queste fonti vi sieno voragini sotterranee, baratri, e abissi, che inghiottiscan l'acque piovane, e le nevi quivi cadute, e liquefatte, e le conservino poi per alimentare tai fonti a qualunque stagione. Benchè la prima supposizione a me non sembri del tutto spregevole, pure io pendo assai più per la seconda, per

ciò almeno che riguarda le Panie, lusingandomi di avere molti fatti diretti per provarla.

§. VII.

Osservazioni fatte in quella parte di Panie, che sovrasta a Massa. Marmi di Serravezza.

Qui il piede della montagna non è calcare come presso Carrara. Usciti che siamo appena di Massa per avviarci alle Panie, ci si presenta una pietra quarzoso-micacea di color bruno, denominata *piasticcio*, perchè alla maniera degli schisti è divisibile tanto che basta in grosse piastre, di cui fanno qualche uso que' popolani, e tra gli altri servendosene a vestire le interne pareti delle fornaci a calcina, per essere tollerabilmente refrattaria al fuoco. E di questa pietra ho trovato costruito l'antichissimo Anfiteatro di Luni (a). Ella dunque poco sopra Massa forma la base delle Panie, e s' inoltra all'insù disegualmente, poichè dalla parte del Forno non estendesi che a tre miglia, ma dalla parte della valle di Renara inoltrasi fino a cinque. In tutto questo tratto adunque non trovasi che questa pietra quarzoso-micacea interrotta in alcuni luoghi da strisce di bianco quarzo amorfo, la quale produce un' infinità di dirupi, di roccie, di precipizj, senza però lasciare in più siti di avere de' piani, e quindi d'esser vestita alla superficie d'uno strato più o meno grosso di terra; nel quale allignano varie piante, e segnatamente dei castagni, e dei noci. Dove termina questa pietra comincia la calcare gregaria, e si vede che la prima serve come di fondamento, e di base per la seconda. La calcare poi subito che ha cominciato a manifestarsi tale, seguita ad esserlo nel restante delle Panie, se non che di mezzo ad essa si scoprono in molti luoghi diversi filoni di marmo. Imperocchè quantunque Carrara venga tanto celebrata, e a tutta ragione, pe' vaghissimi suoi marmi, e distintamente pel bianchissimo

(a) §. III. di questa seconda Lettera.

bianchissimo e lucidissimo statuario, che ha arricchita Roma, o piuttosto il mondo intero di statue, e di trofei, non dee tuttavia essere per questa parte defraudata Massa delle sue lodi, vantando ella pure dopo lo statuario diverse qualità di bardiglio, e di bianco ordinario, ed oltracciò un genere nobilissimo di marmi chiamati *misti*, per esser dipinti a vari e leggiadri colori, del qual genere quasi del tutto è priva Carrara. Solamente hanno lo svantaggio cotesti marmi di non essere a lunghi e grossi filoni, e di trovarli in siti ripidi a segno da non potere con quella facilità esser tradotti al mare, con cui si traducono i Carraresi. L'attenta considerazione dei diversi marmi di Massa mi ha fatta vedere quella stessa fisica verità che mostrata mi avevano que' di Carrara, e voglio dire che questa diversità non è che apparente, in quanto che consiste nella diversità del colore, della durezza, e di altre estrinseche circostanze, ma che intrinsecamente non sono marmi diversi, ma bensì il medesimo, o sia la stessa pietra calcare.

Nel Massese, e nel Carrarese non s'incontrano mai o quasi mai breccie marmoree. Si trovano però a poche miglia sopra Carrara, cioè a dire nelle cave di Serravezza. Una singolarmente bellissima ne ho io veduta colà vicina un miglio a Stazema, incavata nello scoglio d' un monte, i colori della quale sono il giallo, il bianco, ed il rosso. Ad ogni colore corrisponde una pietruzza diversa, e queste diverse pietruzze sono insieme attaccate per via d' una terra calcare. Per essere da molti anni, che si estraе quel marmo brecciato, si è fatto un profondo incavo nel monte, per cui chiaramente si vede che anche qui la pietra gregaria ravvolge, e ferra la marmorea. Tutto il monte altresì, come gli altri vicini vengon composti di quella pietra, a riserva di qualche luogo umile, dove s'incontra la quarzoso-micacea.

§. VIII.

Osservazioni istituite su le cime delle Panie, e nell' Appennino fino alle sue radici dalla parte di Modena.

Esaminato il piede delle Panie, e le pendici di mezzana altezza, dove esistono i marmi, ragion voleva che salissi più oltre, e che superata la grand' erta mi recassi fino alle più eminenti cime per avere una compiuta idea di quella immensa montagna. Tanto io eseguii, e a meglio soddisfare me stesso volli superare in più luoghi quell' alpestre giogo; e in questo lungo disastroso viaggio io posso dirvi che non bastando i piedi dovetti più volte raccomandarmi alle mani. Ma quanto le mie fatiche mi vennero vantaggiosamente ricompensate! Parlerovvi altrove dei lumi novelli che in un punto interessantissimo, quale si è la stratificazione delle montagne, mi fornirono quegli orrori, quelle solitudini, dove regna un eterno silenzio, interrotto soltanto dallo stridente grido dell' aquile, che nel principio della state nidificano su quelle orribili balze (a). Allora altresì ragionerovvi alquanto più a lungo di una doppia giocondissima scena, che inaspettatamente mi si offerse al metter piede su quelle cime, che fu quella di contemplare ad un tempo due stagioni diverse. La parte inferiore delle Panie, esposta a mezzodì, e che guarda il mare (era verso il terminare di Ottobre) si vedeva ancora adorna d' erbe vivaci, e gli alberi perduto ancor non avevano il loro verdore: per contrario ne erano quasi senza tutte le piante, che situate alla parte opposta mirano il nord. Dalla prima sentiva alitare un venticello dolce e soave, che mi ricreava; spirava dalla seconda un' aria fredda, che stringevami il cuore. A dir tutto in breve, là rimaneva un avanzo di estate, qua s' inoltrava un principio d' inverno. Conosco di non avere per gli oggetti che mi circondano la sensibilità di quel celebre vostro Compatriota, che ci ha dato un Libro *su le Montagne*, sette ottavi del

(a) E' la specie chiamata dal Linneo *Melanæctus*.

quale sono per lo meno impiegati in maraviglie, in trasporti, in estasi, in giaculatorie, in rapimenti (a). Crederei tuttavia di avere un'anima che sente, la quale non posso esprimervi quanto restasse commossa all'improvviso spettacolo di queste due contrarianti scene. Qui però io non voglio trattenermi, che intorno ad alcune poche osservazioni generali. L'una sì è che in quel gran corpo di montagne io non ho mai trovato *pori ignei*, come ceneri di vulcani, pomici, lave, vetro soffiato; neppure basalti o graniti, ma tutto è un immenso ammasso di pietra calcarea, la quale estende le sue radici dal mare fino alla parte opposta in vicinanza di Castelnovo di Garfagnana. Solamente mirasi in alcuni rari luoghi interrotta da picciole vene di ardesia argillacea, o da qualche strato brevissimo di pietra arenaria. Questo braccio adunque dell' Appennino è una montagna secondaria, ma la cui stratificazione poco si accorda, come vedrete, con quella che si suole osservare nelle montagne di questo genere. Di più dalla sua sommità fino alle due opposte radici ella è priva di spoglie marine, le quali spoglie se non costituiscono il carattere, formano però l'ordinario accompagnamento delle secondarie montagne.

Il chiarissimo mio Amico Sig. Giovanni *Arduino*, in due sue lettere odepistiche, impressè negli Opuscoli Calogeriani, piene di nuove osservazioni, e di giudiziosi riflessi, parlando incidentemente delle Panie, osserva che queste hanno la loro base in quella pietra scissile, che è stata da me chiamata *quarzofo-micacea* (§. VII.), e ch'egli appella *talco-quarzosa*, e che anzi ne sono in più luoghi composte fino alla metà circa della loro altezza.

Quanto al primo, già veduto avete essere stata da me notata la stessa cosa rispetto a Massa (*ivi*): ma bisogna dire che quel prode Naturalista non abbia fatta osservazione che a questo luogo, giacchè in altri, come ho avvertito, non apparisce segnale di una tal pietra. Riguardo poi al secondo, certamente la medesima si solleva sopra Massa a considerabile altezza;

T t t t t ij

(a) *Lettres Physiques & Morales sur les Montagnes* ecc.

questa però è picciolissima, volendo ragguagliarla alla sommità delle Panie. Siccome questa pietra viene a ragione da lui considerata come una delle primigenie, una di quelle che formano le montagne primarie, o primitive, come le chiamano, e fu la quale posano tante volte le secondarie, così sono stato attento se mai ne' siti più bassi delle Panie, dove si presentano sfondimenti o rotture, venisse a farsi palese; ma ogni mia attenzione è riuscita infruttuosa.

Perduta la vista del mare, e delle sue vicinanze, e preso il cammino alla volta di Castelnovo di Garfagnana, drizzai i miei passi a Forno Volastro, terra per ogni dove circondata da montagne altissime, e che a guisa di quella d'Equi gode nel verno non più di due ore delle influenze immediate del sole. Le miniere del ferro che una volta quivi si cavavano, e la famosa sua grotta, visitata 78 anni fa, siccome vi dissi, dal *Vallisneri* (§. III.), procacciano un nome a questo miserabil villaggio. Delle prime resta soltanto qualche vestigio, essendo state da gran tempo abbandonate, o per la troppa scarsità del metallo, o per la difficoltà di estrarlo, o per la negligenza, ed anche poca perizia de' cavatori. La seconda conservasi anche adesso, quale in parte descritta ci viene dall'elegantissima penna del Reggiano Naturalista. Un lontano romoreggiare di acque che si sente alla bocca della caverna, una volta ellittica che conduce dentro di essa, alta appena per potere capirvi un uomo a dorso incurvato, un atrio meno angusto, e a molti passi allungato, sul piano del quale fluisce e si divalla un picciol rigagnolo, da ultimo una spaziosissima sala, adorna d'ogni intorno e rabescata di produzioni stalattitiche, e flagellata da un canto da una grossa vena di acque precipitanti dall'alto, e producenti alla bocca quel profondo strepito, sono ciò che formano l'essenziale di questo sotterraneo speco. Le novità poi che colà dentro son venute appresso la visita del *Vallisneri*, io le giudico una conseguenza di quel rivolo, che per abbondare di materia tartarosa, e per le deposizioni stalattitiche che vi ha fatto, e che vi va facendo, non può a meno di non aver prodotto, e di non produrre dei notabili cangiamenti, i precisi de' quali ho voluto notare, e descriverò quando oltre a questa farò parola della grotta Equi e della Carrarese,

come pure d' altre diverse, che non vi ho accennate, e che reputo degne di storia. Il restante poi del viaggio da Forno Volastro fino a Castelnovo di Garfagnana null' altro mi offerse che una moltitudine di montagne subalterne, e continuamente minori, composte tutte o quasi tutte della consueta pietra calcare gregaria.

Veduto dalle radici del mare fino alle opposte questo braccio dell' Appennino, volli eziandio vedere quelle parti di esso, che chiamano *Alpi di S. Pellegrino*, le quali hanno la base sopra Castelnovo, che per l' altezza, e pel loro gran corpo non la cedono punto alle Panie, e che alla parte del nord terminano con le amene pianure del Modanese. Dirovi candidamente ch' io figurato mi era di trovare anche qui la medesima qualità di pietra, ma mi accorsi che in ciò questi due tratti dell' Appennino differiscono essenzialmente. Sappiate adunque che l' *Alpi di S. Pellegrino* dalla loro sommità fino alle opposte radici, situate al nord, e al mezzodì, non sono che un aggregato di pietra arenaria, contando io per nulla alcuni brevissimi e sottilissimi strati di ardesia argillosa, che rade volte vi si trovano dentro. Che anzi la massima parte di que' montani villaggi, di quelle Chiese, di quelle capanne non d' altro è fabbricata che di tal pietra. E siccome non difficilmente si sfalda, e si può anche tollerabilmente pulire, così di essa si servono que' montanari e per tegole alle case, e per colonnati, e per altrettali lavori. Ma se questa pietra differisce per natura da quella delle Panie, ne differisce altresì pel modo con cui viene a formare quella numerosa serie di monti. La pietra calcare delle Panie forma un gran tutto, senza avere frapposti strati di terra, che separino pietre da pietre, e quindi le Panie altro non sono, che un immenso ed unico scoglio. Per l' opposto la pietra arenaria dell' *Alpi di S. Pellegrino* è a strati, e a filoni separati, di mezzo a' quali spuntano più lingue di terra; e da ciò nasce che quest' *Alpi*, malgrado l' inclemenza, e la salvatichhezza del luogo, sono vestite verso la cima di campagne erbose, di saggi, di abeti, di carpini; e nelle parti meno eminenti di castagni, di noci, e di altre simili piante fruttifere; quando le Panie, massimamente dove guardano il mare, non ricettano per due terzi della superiore loro al-

tezza quasi niun vegetabile . Finalmente la pietra arenaria è ben lungi dall' avere quella stratificazione, che osservasi nella calcare . Ho fatto qualche esame sperimentale su le parti costitutive della pietra arenaria, e ne ho avuto i seguenti risultati . All' occhio nudo, ma più assai ajutato dalla lente si vede esser composta di granellini quarzosi di varia forma, e grandezza insieme strettamente legati da una terra argillosa indurita, che rompendo in pezzetti la pietra, si fa polverosa . A questi due componenti si aggiunge un terzo, che è la mica argentea, le cui squamette però relativamente alle granella quarzose sono in minor numero . Quindi egli è chiaro che questa pietra si dee collocare fra le composte, chiamate *saxa* dai Naturalisti . Attesa la natura di questi tre componenti non è punto a maravigliare, se questa pietra non soggiace al più picciol moto negli acidi, nè si scioglie punto da essi . S' intende altresì a motivo del quarzo di che abbonda, per che cagione battuta dall' acciaio manda scintille . Ad ogni colpo però ne salta via qualche pezzetto, e quindi apparisce che non è molto dura . Esaminata ne' luoghi nativi non sembra risentirsi molto alle ingiurie dell' aria: il suo colore pende al bigio, a riserva d' essere feminato di punti argentini, che sono le picciole squame della mica .

Il prelodato Sig. di *Saussure* ha osservato (l. c.) che la pietra arenaria trovasi quasi sempre tra le montagne primitive, e le secondarie . Come fisico esattissimo, e che non asserisce se non quello che vede, ha voluto modificare questa proposizion generale con la particella *quasi*; per cui dà a vedere che qualche rara volta la pietra arenaria non è dunque frapposta ai due menzionati generi di montagne . Io posso fornire a quel celebre mio Amico una prova novella di tal modificazione, sì nelle Pianie guardanti Massa, sì nell' Alpi di S. Pellegrino . Nelle prime tra le montagne calcari secondarie, e la pietra quarzoso-micacea primaria, non apparisce certamente giammai l' arenaria, che anzi quelle, come già dissi, appoggiano immediatamente a questa . Le seconde poi da cima a fondo sono un composto di pietra arenaria, parlando anche delle più basse colline, come specificherò meglio altrove, senza che mai apparisca indizio d' altra qualità di pietra sottostante .

Nelle montagne arenarie di S. Pellegrino non ho mai trovato corpi stranieri . Crederei tuttavia di aver prove dirette, che sono un lavoro dell'acque . Io lo deduco da certi globi pur arenarj, del diametro talvolta di molti piedi, che in più luoghi ho osservato incastrati nelle suddette montagne arenarie, segnatamente in alcune diroccate rupi, dentro cui stavano in parte seppelliti, ed in parte sporgevano in fuori, alcuni de' quali globi essendo stati da me esaminati, ho trovato che avevano marche le più manifeste, le più convincenti d' essere stati una volta fluitati . Ma non è di questo luogo il discendere ai dettagli di questo raro fenomeno, e l'individuare i luoghi dove si osserva.

Per gli esami da me fatti nelle Pannie, e nell' Alpi di S. Pellegrino voi vedete adunque, dottissimo Amico, che la Natura nella formazione dell' uue, e dell' altre si è servita di materiali diversi. Là non ha impiegato che calce, qua in massima parte che arena . Per conto però di quest' ultime, se dalla linea diritta che da Castelnovo di Garfagnana conduce a Sassuolo (grosso Borgo poche miglia distante da Modena) piegheremo o dalla parte del Bolognese, o dall' altra del Reggiano, e del Parmigiano, troveremo che la Natura è ricorsa ad altre materie, non ostante che questi tratti sieno una continuazione dell' Appennino . Così molte montagne sopra Bologna, sopra Reggio, e sopra Parma abbondano di pietra calcare, non senza una quantità sterminata di restacei, la più parte calcinati. Quella porzione di Appennino, per cui da Fornovo nel Parmigiano si va fino a Pontremoli, e che fu da me esaminata andando alla Spezia, è ella pure pressochè tutta calcare . Se poi si traversi lo stesso Appennino, andando da Pavia a Genova, oltre la pietra calcare si trovano monti interi di pietra steatitica, e asbestina. Chi detto avrebbe che la famosa Bocchetta fosse in gran parte composta di asbesto, siccome io, forse il primo, ho avuto la contentezza di scoprire? Si vede adunque che la Natura nella formazione degli Appennini si è compiaciuta della varietà, come usar suole in più altre operazioni dei tre Regni. Pare solamente che non abbia messi in opera i graniti, quel genere di pietre che per la dibattuta sua origine, pe' luoghi dove si trova, per le conseguenze che se ne deduco-

no, fa tanto romore presso i moderni Geologi. Posso almeno accertarvi di non averli mai trovati ne' viaggi da me intrapresi in diversi tempi su gli Appennini.

Ne' racconti fattivi intorno a queste due Alpi vi sarete facilmente aspettato da me, ch' io vi ragionassi delle loro altezze paragonate al livello del mare. La vostra aspettazione era giusta, e mi rincresce di non avere potuto appagarla per mancanza di un buon barometro, la quale mi ha fatto commettere questa involontaria ommissione. Non saprei se in qualche rimota e indiretta maniera potessi al di grosso supplirvi, coll' accennarvi la temperatura che colassù regnava quando io mi ci trovava, confrontandola con quella delle circostanti soggette pianure. Dirovvi adunque che il giorno 12 di Ottobre il mio termometro alla sommità delle Panie in luogo ombroso, e dove non avea luogo la riflessione del raggio solare, discese ai gradi $13 \frac{1}{2}$ sopra la congelazione; sull' Alpi poi di S. Pellegrino, dove regna maggior freddo per non sentirsi quivi l' aria del mare, discese nel seguente giorno ai gradi $8 \frac{1}{4}$, quando un altro termometro similmente graduato, e posto all' ime radici delle Panie, marcò all' ombra in que' due giorni per attestazione d' un mio Amico, conoscitore di queste materie, e degno di fede, i gradi 21 all' incirca.

Stando fuor di Ginevra nella dolce vostra solitudine di Genthod, voi vedete più montagne della Savoia coronate il capo d' eterne nevi. Le cime delle due Alpi, di cui ragiono, ne rimangono prive nella state inoltrata. Non è però che anche allora in più luoghi scoscesi e profondi non vi restino vecchie nevi tutti gli anni dalle nuove ritrovate e sepolte. Finalmente un' altra non equivoca pruova dell' altezza grande di quelle alpestri regioni sul piano del mare ella è, che le scarfe biade de' magri terrenelli sottogiacenti al sopraciglio dell' Appennino sogliono maturare un mese e mezzo più tardi dell' altre situate ne' colli Modanesi, e Reggiani.

§. IX.

Osservazioni intorno all' insolita Nebbia della state prossima scorsa, apparita anche su gli Appennini; e ai Temporalì insorti in quella occasione.

A compimento delle cose osservate nel mio viaggio montano lasciar non voglio di parlarvi di queste meteore, poichè quantunque estranie al soggetto, e alla mia professione, ciò non ostante per essermisi offerte non cercandole, anzi pensando a tutt' altro, io non doveva negligerle. Tutte e due antivennero la mia partenza verso il mare al dì là d' un mese. Già prima della metà di Giugno l' aere di Lombardia si era fatto grandemente nebbioso, e la nebbia benchè non c' involasse l' occhio del sole, ce lo rendeva però offuscato d' asfai, e di buon mattino, e verso la sera rubicondo, e come sanguigno. Spirava allora un picciol ponente, che si fece anche sentire ne' dì seguenti, ne' quali insorse in Pavia, e ne' suoi contorni più d' un temporale, che avea pur la direzione da ponente, accompagnato da pioggia, da tuoni, e da fulmini. Finiti che erano i temporalì, seguitava come prima a farsi vedere la nebbia, ed il giorno 23 dello stesso mese essendo io partito per Reggio, e speso avendo in quel viaggio tre giorni in barca per la lunga del Po, osservai che in tutto quel tratto d' acqua, e ne' circostanti luoghi vi era egualmente fitta come nel Pavese.

Il celebre Sig. Professore *Toaldo* nell' interessante sua Memoria relativa a questo soggetto osserva l' estensione che ebbe da un mare all' altro il temporale del dì 26 di Giugno, e la prodigiosa quantità di saette che diede (a). In quel giorno a Gualtiere nel Reggiano in riva al Po il cielo fu soltanto nuvoloso, oltre l' essere di sotto ingombrato dalla solita nebbia sottilissima. Ma nell' entrante notte infuriò colà un temporale che durò più ore. Si sciolse in semplice pioggia,

Tomo II.

V v v v v

(a) Opusc. di Mil.

e questa non molto dirotta , ma che continuò fino al romper dell' alba . Non saprei dirvi di avere mai sentito tanti fulmini , quanti ne scoppiarono in quella notte . Paruto essendomi dappprincipio che l' uno succedesse all' altro in tempi eguali o quasi eguali , volli farne quella prova che trovandomi in letto , e nell' oscurità poteva esser l' unica , voglio dire di ricorrere alle battute del mio polso , e m' avvidi che non m' era ingannato . Contai sette fulmini , e tra l' uno e l' altro vi si frappose sempre quell' intervallo di tempo che non fu minore di 19 battute , nè maggiore di 22 . Sembrava dunque che fosse una macchina , che per caricarsi d' elettricità atta a fulminare esigesse presso a poco un determinato spazio di tempo . Sebbene dopo lo scoppio di quei sette fulmini , gli altri moltissimi che si sentiron dappoi non si succedevano più in quella data proporzione di tempo . Il giorno seguente , cioè li 27 Giugno , proseguì il cielo a restar nuvoloso , senza che dopo quella pioggia notturna diradata si fosse nè punto nè poco la nebbia . Il restante di quel mese , e la prima settimana dell' entrante Luglio furono nel Reggiano , e nel Modanese egualmente caliginosi , nè andarono esenti da qualche temporale accompagnato da grandine . Dominò quasi sempre lo stesso ponente , più o meno rimesso , più o meno forte , e quando soffiava anche gagliardamente , la nebbia perseverava la stessa . Solamente in seguito cominciò a farsi meno densa , e allora rasserenatosi con qualche costanza il cielo , cessò affatto il ponente .

Questa nebbia che con l' estremità inferiore toccava la terra , e che sollevavasi ad altezza incommensurabile all' occhio , era asciutta in modo , che non bagnava punto gli abiti , nè le piante , nè gli altri corpi terrestri . Quindi apparisce che composta non era di vapori acquei , come le nebbie ordinarie , ma sì bene di esalazioni secche , la qual particolarità era già stata avvertita dal mentovato chiarissimo Professore di Padova . In effetto se stata fosse vaporosa , chi non vede che dopo un vento forte , dopo un rovescio di pioggia doveva svanire ? Questo doppio fatto mi si presenta d' inverno soventemente in Pavia , alla quale città per la frequenza delle folteissime nebbie diuturne non saprei quale altra paragonare in Italia . Non si può dunque dire che la nebbia , di cui fa-

velliamo, concorresse alla formazione di que' nuvoli temporaleschi. Credo bene che co' suoi aliti, esuberanti probabilmente di fluido elettrico, concorresse alla generazione di quel numero innumerabile di fulmini. Tutti i temporali che in occasione di quella nebbia vennero dove io mi trovava, furono da me con attenzione osservati. Li trovai sempre più abbondanti di fuoco, dirò così, che di acqua, giacchè la pioggia d' ordinario era tenue, e le saette copiosissime: che anzi per due volte furono pur tali, senza che cadesse di cielo una stilla d' acqua. Espiando con occhi attenti la nuvola temporalesca, o prima che venisse sul nostro zenit, o dopo che ne era partita, mostrava chiaro non esser lei gravida di molta pioggia, conciossiachè laddove l' altre nuvole temporalesche apportatrici di qualche acquazzone sono d' una considerabile grossezza, e quindi formano quelle apparenti gran torri, quelle biancheggianti montagne, la nuvola accennata solea essere piuttosto sottile. Un' altra differenza io osservai fra i temporali di quella nebbia, e gli altri. Parlando degli ultimi, spesso cominciano a formarsi a cielo sereno, ingrossano a poco a poco, ed allargatisi sul nostro orizzonte versano un nembo d' acqua, o di grandine, indi o recandosi altrove, o sciogliendosi ridonano al cielo la tolta serenità. Per contrario quando dominava quella nebbia un velo nuvoloso stendevasi sopra una immenità di paesi, produceva ora in un giorno ora in un altro de' più romorosi, e de' più spaventevoli temporali, e dopo che questi cessato avevano non lasciava quel velo di nugoli di coprire il cielo. Non tacerò un' altra singolarità relativa ai fulmini, e ai tuoni di quella stagione. I primi bene spesso non erano accompagnati da quel suono stridulo e allungato, oppur da quell' altro somigliante di molto ad uno o a più colpi di cannone, i quali due suoni sembrano formare l' estrinfeco distintivo de' fulmini ordinarj, ma avevano infinitamente in grande la somiglianza del suono che produce una canna quando con entrambe le mani fendesi per lo lungo prestamente in due: oppur quell' altro che cagiona un violento colpo di bastone su d' una tavola. I tuoni poi che per l' oscuro lor suono pareano altissimi, non erano molte volte continuati, ma interrotti da morule che li rendevano come stentati, e difficili a farsi sentire. Una simile cir-

costanza viene pure marcata dal più volte lodato Astronomo Padovano.

Fin qui ho ragionato, illustre mio Amico, della nebbia non vaporosa, e dei fenomeni che la accompagnarono nelle pianure Lombarde. Passo ora a farvi parola della medesima da me osservata ne' siti montuosi, quando dalla parte di Parma superai il giogo dell' Appennino per recarmi a Portovenere. Questo picciol viaggio venne da me fatto in un giorno, che fu il ventesimo terzo di Luglio. La nebbia in quella stagione era una metà circa meno densa di quello che stata era in Giugno. Di più il tempo allora era sereno, a riserva di alcuni temporali, che a quando a quando insorgevano da libeccio. In quel tratto di monti era egualmente diradata che alle loro falde, e radici. Quando fui molto inoltrato su di essi, io era sopra tutto attento, se nelle loro gole, e ne' più bassi lor fondi vi appariva nel modo stesso, e trovai che sì, di maniera che quel caliginoso che aveva l'aria su le più alte cime, lo aveva pure in que' cupi fondi. In più d'un luogo di quell' alte montagne li formavano sotto i miei occhi degli ammassamenti più o meno grandi di nebbia, ma che era di qualità vaporosa, entrando dentro alla quale io restava bagnato, quando l' altra era asciutissima. Inoltre la prima era di gran'lunga più spessa della seconda. Ma il fenomeno più bello e più grandioso che mi si offrì fu sul giogo altissimo di quell' Alpe. Un miglio e mezzo prima di giungervi mi trovai nascosto fra un ammasso di nuvole, che venivano da libeccio. Profeguendo il cammino all' insù dopo l' aver fatto un quarto di miglio, cominciai a sentire qualche colpo di tuono che mi parve vicinissimo. Andando più alto e sempre in mezzo alle nuvole mi soprapprese la pioggia con vento; e da' tuoni novelli che attorno a me romoreggiavano, e da' vivissimi lampi che qua e là vedeva guizzare, m' accorsi non senza ribrezzo d' essere attorniato dal temporale. Ciò nondimanco feci coraggio, ed avendomi assicurato la guida che mi conduceva, che pochi passi restavano a pervenire al sommo della montagna, dopo che scendendo al basso se non dalla procella, da quel bujo almen delle nuvole, che mi toglieva la vista, io mi farei liberato, spronai il mio cavallo, e in poco d' ora giunsi di fatti alla sospirata cima,

chiamata *Cisa*, che è il luogo dove termina lo stato di Parma, e comincia quello della Toscana. Quivi la pioggia era più rimessa, ma il vento più forte, e l' aer freddissimo. Quando fui avvolto nel temporale, siccome cominciai a sentire del freddo, così tirai fuori il termometro, che era costruito in maniera, che non sofferiva punto dalla pioggia, per appoggiare su d' una lastra d' argento, ed è quel desso che voi graziosamente mi regalaste a Ginevra, e che tra le molte altre cose vostre preziose e care io conservo qual dolce pegno dell' amicizia verso me vostra. Colassù adunque discese in pochi stanti fino ai gradi $7\frac{1}{2}$, quando alle radici della montagna marcava i gradi 25 sopra lo zero. Seguendo la direzione della strada io non potea fare due passi senza cominciare a discendere, e già era sull' avviarmi all' ingiù, quando un inaspettato fenomeno mi determinò a cangiare idea. Alzando gli occhi al di sopra della strada verso mezzodì vidi un chiarore attraverso la nuvola tempestosa, il quale a me parve venire da' raggi solari che andassero a ferire la sommità di una contigua più elevata montagna. Uscendo fuor di cammino la *Cisa* s' inalzava dolcemente verso quel luogo dove veniva il chiarore, e però senza indugio mi determinai d' incamminarmi a quella volta. A mano a mano ch' io saliva colassù, diradavansi i nuvoli che mi attorniavano, cresceva il chiarore, veniva meno la pioggia, scemava il freddo, e continuando sempre più in alto il cammino, a poco andò che svelata mi apparve la bella faccia del sole, trovandomi già tutto fuora del temporale, anzi vedendolo aggirarsi sotto a' miei piedi. E' ben difficile che nel restante de' giorni miei io m' avvenga in altro naturale oggetto per me più sorprendente di questo, più diletto, più grande. Standomi adunque su quella cresta di monte mi appariva il sottoposto temporale in sembianza d' un immenso lago nuotante nell' aria, irraggiato dal sole, e tutto in tempesta. Erano cioè gli strati superiori delle nubi temporalesche, che investiti dalla luce solare, e dal vento prendeano quel mentito vaghissimo aspetto. Soffiando laggiù un forte libeccio, si vedevano correr le nubi all' opposta parte piene d' increspamenti, di onde; ed oltre a quel moto di rapimento e comune ne avevano altri particolari, ed uno distintamente di rotazione, per cui s' in-

generavano in esse qua e là molti vortici , ed a vicenda si distruggevano , somiglianti a quelli che veggiamo in piccolo nell' acque correnti de' canali , de' fiumi . La cadente pioggia che andava a percuotere que' petroli ciglioni , e quelle annose boscaglie, cagionava un confuso non interrotto fragore, che veniva a più doppi accresciuto, e dal vento che scuoteva violentemente le piante , e da' rivi, e torrenti che allora turgidi d' acque, e al basso precipitanti frangevano con isfrepito contro que' moltiplicati dirupi. I tuoni , e i lampi proseguendo ad esser frequenti , mi determinai d' intraprendere qualche riflessiva osservazione su di essi, la qual cosa non mi fu concessa di fare quando io era in mezzo al temporale, per la qualche paura, il confesso, che allora mi prese. Sopra tutto stava attento per vedere come producevasi il lampo, se da un' elettrica scintilla lanciantesi da un nuvolo nell' altro vicino, come vogliono i più de' moderni Fisici, allorchè il primo abbonda di elettricità, e ne scarpeggia il secondo. Ma nulla in ciò di preciso, nulla di distinto mi fu dato di poter vedere, per formare quell' immenso aggregato di vapori un tutto unito , e come un nuvolo solo . A volta a volta vedeva soltanto rompere dal seno di que' vapori una capace scintilla, ora semplice, or divisa in più rami, che in un attimo scorreva un amplissimo spazio , e per lo più non diritta, ma a varj angoli, e a svolte composta, o a *zigzac* come direbbono i Francesi , e perciò similissima alle elettriche scintille che schizzano da una macchina assai poderosa. Un momento appresso mi feriva l' orecchio il romore del tuono, o piuttosto del fulmine, ma questi fulmini che ad ogni balenar di scintilla scoppiavano , erano piuttosto piccioli . Per un quarto d' ora fui tacito ammiratore giulivo di quella scena, che andò a finire col dileguarsi a poco a poco, e svanire le sottocorrenti nuvole , per cui la prossima Cisa, e i circonvicini luoghi d' invisibili che mi si rendevano prima, mi apparirono tutti svelatamente . Alle cose fin qui notate ne debbo aggiugner tre altre , l' una che durante il temporale in que' liti più bassi era colassù il vento sommarmente rimesso, l' altra che minore sentivasi il freddo, mentre il termometro che nel luogo del temporale marcava, come già dissi, il grado $7\frac{1}{4}$, su quella cima era asceso all' om-

bra al grado 12: la terza che la nebbia non vaporosa, quella che è il precipuo soggetto di questo paragrafo, tanto fu quella eminenza, che nei monti meno alti dove era piovuto, si osservava la stessa, ciò a dire l'aere appariva caliginoso in guisa, che quantunque non togliesse la vista de' lontani paesi, la rendeva però molto offuscata. Ed un simile offuscamento mi si diede pure a vedere quando lasciata la Cisa, e travalicato l'Appennino giunsi a Pontremoli, e il giorno appresso alla Spezia. Medesimamente non ne andava esente quel golfo, e il mare Ligustico. Sebbene a poco a poco andossi perdendo, e verso li 5 di Agosto non restava di quella nebbia più apparenza, più ombra. Durante poi il mio soggiorno a Portovenere, e in quelle vicinanze, ricomparve due volte, l'una al nascere d'un libeccio, l'altra d'un scirocco, ma tutte e due le volte fu assai rara, e di breve durata.

Questi sono que' pochi fenomeni relativi a questa straordinaria meteora, che nel tempo ch'io m'occupava in altri oggetti ho potuto osservare. Voi non ignorate probabilmente l'ipotesi pubblicata intorno alla sua origine dal Sig. *Toaldo*, il quale opina che sia stata una conseguenza de' tremuoti della Calabria, in quanto che dopo quelle violentissime e diuturne scosse siccome è stata osservata in quegli sfortunati paesi una sottilissima nebbia cagionata probabilmente da un corpo immenso di efalazioni sprigionate allora dall'interno della terra, e sollevatesi nell'atmosfera, così questa nebbia col favore de' venti è stata portata dentro a questo nostro cielo Lombardo. Tale ipotesi viene appoggiata a due ragioni principali, l'una che nel tempo della maggior densità di quella nebbia presso di noi dominavano appunto i venti austro-sciroccali, che traversato aveano quelle desolate contrade; l'altra che questa nebbia non toccava mai terra, ma era sempre alta, e perciò denotava esser venuta dall'alto, e come caduta nella nostra atmosfera.

Mi era già nota questa ipotesi prima di fare le osservazioni sopradescritte, e a me parve allora non solo ingegnosa, ma anche plausibile ed appagante; e adesso che le ho fatte, non lascio neppur di pregiarla. Solamente il rinomato Autore di essa, mio grande Amico, potrà vedere, se mai si abbatte

a leggere questi miei fogli, che qualche circostanza accompagnante quella nebbia è alquanto diversa da quelle che sono state notate da lui. Così per atto d' esempio nella Lombardia Austriaca, e nella Modanese non era un vento austro-sciroccale, ma un ponente che dominava, quando l' aria di queste parti era sommanente caliginosa. Solamente una volta a Portovenere si offuscò all' insorgere del scirocco. Di più la nebbia di questi paesi non era soltanto in alto, come nel Padovano, dove soffrivano anche que' venti austro-sciroccali, siccome fu osservato dal mentovato Professore, ma toccava realmente la terra; e nei dirupi più profondi dell' Appennino appariva, come fu detto, egualmente folta che nelle sue più elevate cime. Trovandomi nelle colline di Reggio ne' primi giorni di Luglio, quando cioè non erasi ancor diradata, institui la seguente curiosa esperienza. All' aperto feci piantare in terra una capannuccia di sarmenti, fornita d' un picciol uscio, e per ogni banda ferrata, a riserva d' un rotondo pertugio in alto, per dove poteva entrare un raggio di luce solare, che andava a ferire il suolo della picciola capanna. Lo scopo era se stando chiuso là dentro, e con gli occhi fissi alla parte del raggio rasente terra, io poteva vedere attraverso di esso la nebbia: la vidi di fatto, e meglio ancora sotto la lente, per cui attraverso del sole distingueva le particelle che la componevano, le quali non eran mica di forma globosa, come i palloncini o le vescichette vaporose, osservate sì bene dal chiarissimo Sig. *di Saussure*, ma per l' opposto avevano figura irregolare, e quale appunto suole esser quella delle esalazioni terrestri. Notai di più che tali particelle, almeno molte, uscivano dalla terra, e si sollevavano in alto. La qual' ultima circostanza, se stata fosse universale, avrebbe dato a credere che quella nebbia non era forestiera, ma locale. Ma io intorno all' origine di tal meteora non ardisco decidere, e lascierò a quel dottissimo mio Amico, e a voi il portare quel savio giudizio su queste mie passeggere osservazioni, che verrà riputato più consacrato alla verità.

Prima di finir la Lettera non v' incresca ch' io aggiunga una parola su i temporali. Quando io mi trovava presso le Pianie, rari eran que' giorni, che non ne insorgesse qualche-

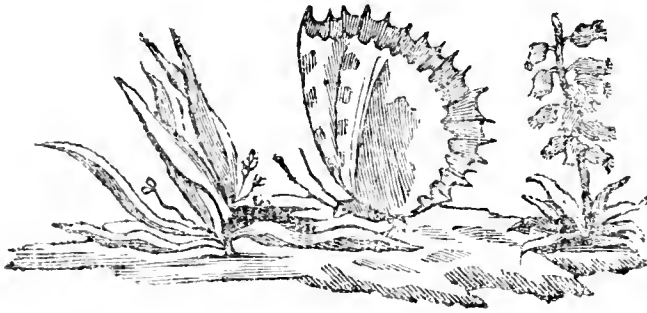
duno

duno verso la loro sommità. Più volte appostatamente ho cercato che mi si rinnovasse la scena , che aperta mi si era sopra la Cisa , ma sempre inutilmente , posciachè giunto io a quelle cime , o il temporale era omai svanito , o li era recato altrove , o le nuvole temporalesche si erano sollevate a segno che più non toccavano la montagna . Privo di questo spettacolo , non me ne mancò un altro analogo , che non lasciava esso pure di avere il suo istruttivo , il suo bello. Riguardava esso la formazione dei temporali. Verso la metà del mattino fu quelle nude roccie aridissime cominciavano qua e là ad apparire a non molta lontananza dal dosso dell' Alpe piccioli ammassi di vapori , a somiglianza di fumi . Talvolta sembravano riposar su la terra , e tale altra erano da essa alquanto sollevati , e pendenti in aria . Questi ammassamenti vaporosi venivano accresciuti in numero da altri di fresco prodotti o appariti . Il loro moto in generale solea esser lentissimo , e quello di ascendere . Via via che ascendevano , facevansi di maggior corpo , quantunque però taluno o calasse di mole , od anche del tutto svanisse . L' aggrandimento nel volume era cagione che fra loro si avvicinassero di più , e che in progresso di tempo arrivassero anche a toccarsi . Quindi dopo qualche ora , e spesso verso il mezzodì , o poco più tardi que' piccioli aggregamenti di vapori insieme uniti venivano a formarne un solo grandissimo . Allora la nuvola (che così chiamerò quell' aggregato totale di vapori) con le sue parti più alte cominciava a soprastare alla cima delle Panie , e queste parti che rappresentavano varie e bizzarre figure , erano sempre bianchissime , per essere investite da' raggi solari , quando l' altre sottostanti apparivan nere oppur bigie , per la maggiore o minor privazione di luce . Intanto la nuvola si faceva più estesa e più densa , varj ondeggiamenti , e moti vertiginosi a somiglianza d' un aspo nascevano dentro di lei , e cominciava ella ben tosto a lampeggiare , e a tuonare . Era regola ch' io non ho mai trovata soggetta a eccezioni , che fu le prime quando il temporale era nascente , le scintille elettriche eran cortissime , e brevissimi , e picciolissimi i tuoni . In ragione poi che cresceva il temporale , quelle si facevan più lunghe , e questi più romorosi , e di maggiore durata . Aggranditosi così il temporale , cominciava a versar ac-

qua o gragnuola , ed ora esso finiva su que' deserti , dove era nato , ora abbandonate le Panie venia dal vento recato sopra altri paesi . Sebbene questo vento pareva che avesse la primaria sua origine dalla nube temporalesca . Quantunque , come ho già detto , io non abbia mai avuto il piacere di trovarmi su le Panie dentro al temporale , mi sono però abbattuto più d' una volta a' suoi lembi , e quivi il vento soffiava gagliardamente , e aveva tutte le apparenze di venir proprio dal seno della nuvola tempestosa . Osservava di più che sciolta questa , oppure allontanata , quello altresì andava a finire . E queste sono alcune delle principali circostanze che viaggiando io nelle Panie ho veduto accompagnare la formazione di que' frequentissimi temporali . Ma altrove io vi vi parlerò forse di altre mie osservazioni relative a un tal genere di meteore , e allora non lascerò di sottoporre al lucidissimo vostro intendimento alcune mie filosofiche congetture , da me ora taciute , null' altro essendomi io proposto nel ragionare dei temporali che il far le parti di semplice Storico .

Ma è tempo ch' io termini questa seconda mia Lettera . Nella prima , che ebbi già il compiacimento di scrivervi , m' ingegnai di abbozzarvi un compendio delle cose più principali da me osservate sul mare . In questa seconda voi lo avete di quelle , che ho esaminate su i monti . Quando le circostanze mel permetteranno procurerò nella mia Opera di sviluppare tutte queste materie , e di corredarle delle necessarie pruove , bene spesso sopresse in queste due Lettere , per servire alla brevità . Dalla promessa Opera comprenderete anche meglio che dalle due Lettere , che in questo viaggio , nel quale sono stati da me impiegati tre mesi compiuti , non ho al certo risparmiato fatiche , nè sudori , e dirò anche danaro , stato non essendo indifferente un tal viaggio alle limitate finanze d' un Filosofo . Ciò nondimanco ove queste mie fatiche vengano coronate dall' approvazion vostra , e di quella del Pubblico , io mi terrò contentissimo , e questa avrà luogo presso di me della più splendida ricompensa . Oltre il sincero desiderio di apportare in questa occasione qualche utilità alla scienza che professo , ho cercato di non essere infruttuoso al Regio Imperiale Museo di Pavia , cui ho l' onore di presedere , coll'

arricchirlo di più esemplari di tutte quelle naturali produzioni, sì marine, che terrestri, le quali sono state il soggetto di queste due Lettere. Tali esemplari in questo pubblico onorevolissimo Luogo esistenti, ed ostensibili a chiunque proccaccieranno anche maggior credenza alle cose fin qui narrate.



APPENDICE

ALLA MEMORIA

Sopra i Fuochi de' Terreni e delle Fontane ardenti in generale , e sopra quelli di Pietra-Mala in particolare .

Del Sig. ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nell' Università di Pavia .

HO avuto occasione in un giro da me fatto lo scorso Maggio in compagnia d'altre dotte persone, e delle naturali cose singolarmente studiose (*a*), di osservare le fiamme d' un altro terreno ardente; le quali ho riconosciuto essere dell' istessa natura delle già descritte di Pietra-mala, e subire le stesse vicende: cioè null' altro essere, che aria infiammabile sorgente copiosamente in alto attraverso una terra secca, e screpolata, sprovvista di qualsivisia bitume. Questo terreno ardente si trova alcune centinaia di passi solamente lontano dalla famosa città di *Velleja* già da molti secoli sepolta, e scopertasi ha pochi anni nelle montagne del Piacentino (*b*). Siccome a quello di Pietra-mala, così pure a questo di *Velleja* si dà nome molto impropriamente di vulcano: ciò che potrebbe farlo incolpare dell' eccidio di cotesta antica nobile città. E' però da osservarsi riguardo al primo, che non v'ha in tal luogo il minimo vestigio di eruzione, nè alcuna produzione vulcanica vi s'incontra; e riguardo alle rovine, la semplice ispezione locale ne

(*a*) Il Sig. Marchese Pompeo Casani, Cavaliere nella sua fresca età ricco di cognizioni d'ogni genere; il Sig. Abate Don Carlo Amoretti, Segretario della Società Patriotica di Milano; e il Sig. Canonico Don Gio: Serafino Volta, Custode del Museo di Storia

Naturale della R. I. Università di Pavia.

(*b*) Del 1757 vi è stata trovata a caso la celebre *Tavola Trajana*; e negli anni susseguenti furono intrapresi gli scavi, che hanno scoperto buona parte della città, un circo ecc.

mostra che un pezzo di montagna argillosa, come son tutte quelle che ivi sovraffano, soggette a smottare, lasciata già d' improvviso, oppur anche successivamente, ha riempito di terra e coperto la città in un colle vicinanza. Simili frane o scoscendimenti di terra sono frequentissimi in tutta quella catena di montagne argillose o margacee, e chiamansi dagli abitanti *libie* o *lavine*. Se ne veggono qua e là di recenti, e vestigi ne rimangon dappertutto. Ci fu anzi mostrato un luogo distante men di due miglia da Velleja medesima, dove rimaser sepolte, non son che tre o quattr' anni, alcune case. Or sul luogo propriamente della città anch' essa sepolta trovasi un ampio rialzo di terreno, che non siegue l' andamento dell' altre montagne, ma è gettato di traverso, e che dechina verso un torrente chiamato *Chero*. Il sito delle fiamme trovasi verso il fine di questa china, direttamente sotto Velleja, e assai vicino al nominato torrente.

Non posso a meno di far qui una riflessione. Parlando dei fuochi di Pietra-mala affatto simili a questi, e convenendo aver ricorso a qualche supposizione per intendere come tant' aria infiammabile potesse colà trovarsi raccolta in vaste cavità sotterranee, quanta se ne ricerca per somministrar l'alimento continuo a tali fiamme, la prima idea che mi venne alla mente, e che proposi per la prima, fu quella di una palude e di un ammasso qualunque di sostanze vegetabili od animali, rimasto sepolto per una di quelle rivoluzioni, che è facile, io dicea, d' immaginare: il disfacimento delle quali sostanze sepolte sappiamo qual prodigiosa quantità d' aria infiammabile produce. Or qui per il terreno ardente di Velleja una tal rivoluzione non ho più bisogno di proporla indovinando, non è supposizione o congettura, ma fatto certo, di cui esiste un monumento pur troppo parlante.

Eran due i luoghi, da cui s' alzavan le fiamme, e fiamme ben alte e veementi, quando noi li visitammo; un vicinissimo al torrente, l'altro alcuni passi più in su; quello piuttosto ristretto, questo considerabilmente più ampio. Ci disser le persone che seguivano accompagnandoci, tralle quali il Parroco del luogo, uomo di molta intelligenza nè ignaro di Fisica, che non sempre ardono ambedue, sendo soggetti a spegnersi, singolarmente il più picciolo; ma che si riaccen-

don tosto al gettarvi sopra un solfanello, un mazzetto di paglia, o qualsivoglia altro corpo acceso; che il vento piuttosto che la pioggia li spegne; che questa anzi d'ordinario fa forger le fiamme più alte; finalmente che il più picciolo di quei terreni ardenti, che è più abbasso, rimane soventi volte coperto d'acqua; e che allora sorgon da essa copiosissimi gorgogli, che la fan tutta ribollire; sebben si senta fredda tuffandovi la mano, come ogn' altr' acqua. Tali gorgogli, ci diceva il nostro bravo Curato, sono gorgogli d'aria, che si può con un cerino infiammare a pelo dell'acqua medesima, e si può anche raccogliarla in vesciche per mezzo d'un imbutto, com'egli asseriva aver praticato più d'una volta, ed accenderla quindi a bell'agio spingendola contro la fiamma di una candela. Tanta è la copia, soggiungeva, di quest'aria che scappa fuori dall'acqua, ch'io vorrei provarmi a riempirne un pallone aerostatico, se l'aveissi, sicuro di riuscirci in poco d'ora.

Troppo ci avean detto, perchè dubbio più rimaner potesse intorno alla natura di questi fuochi. Ma anche prima di tal relazione da quel poco ch'io aveva sentito raccontarne in confuso, e dall'esempio di quelli di Pietra-mala, era più che persuaso che procedevano anche questi da null'altro che da aria infiammabile, cui per raccogliere aveva portato meco da Pavia e boccie e imbuti. Aveva anzi di più prevenuto i compagni di ciò che avremmo sicuramente veduto; un de' quali pareva tuttavia più inclinato a credere, che tali fiamme traessero il loro alimento immediatamente o mediatamente almeno da qualche vena di petrolio, tantochè si prometteva quasi di poter raccoglierne in sostanza, o di ricavarne almeno della terra pregna di simil bitume.

La prima cosa che proposi di fare, dopo ch'avevmo data un'occhiata alle fiamme, e veduto che eran rossigne (tali appariano per lo splendor vivissimo del sole che vi dava addosso), senza fumo o fuliggine sensibile, e che tramandavano appena un leggerissimo odore, il quale non si potea neppur dire oleoso, la prima cosa, dico, che fu proposta e fatta ad oggetto di verificare le mie idee, è stata quella di allagare uno dei terreni ardenti. Si scelse per ciò fare più commodamente e più presto il men grande; si cavò alquanto di

terra; e vi si versarono alcuni secchj d' acqua . Questo bastò ad estinguere le fiamme in tutto il sito allagato ; ma non a togliere l' eruzione spontanea copiosa dell' aria , la quale facendo attraverso l' acqua medesima in grossi e frequenti gorgogli ribollir la faceva in varj siti . Allora io feci vedere a tutti , come presentando un candelino acceso alle bolle che si presentavano a galla dell' acqua , tutte vi prendean fiamma . Questa fiamma non durava , è vero , nè si estendeva su tutta la superficie dell' acqua , come avviene in altre fontane ardenti , e come succede talora anche quivi , per la ragione ch' erano i gorgogli, sebben copiosi, come s'è detto, troppo ancora distanti un dall' altro, e che varj soffrivano delle interruzioni o pause: e ciò nasceva da che al primo inzupparsi del terreno molti screpoli e fessure avean dovuto chiudersi , ond' era l' aria sgorgante prima in piena copia ritenuta ora in gran parte . Il trovarli per tal modo chiuse o ingorgate sul fondo del nostro laghetto molte vie all' aria , faceva che tutt' intorno sul labbro ancor secco o appena tocco dall' acqua uscisse essa aria con maggior impeto , e fischinando . Intanto noi facevam versare nuov' acqua , onde soffocare in parte anche questi getti , tantochè allagato più ampiamente il terreno , non avea ormai più l' aria altra strada che quella di uscir su per il terren bagnato e attraversar l' acqua . Infatti andavan mano mano crescendo i gorgogli in vigore e in frequenza , e per qualche larga via apertasi infine stabilmente sul fondo eran già divenuti parecchi non più interrotti e vaganti , ma continui e permanenti . Di maniera che non v' ha dubbio , che durando più lungo tempo a covarvi sopra l' acqua , veduto avremmo fortirne le bolle d' aria in quella strabocchevole copia , che al riserire del nostro valente Parroco vi si osserva negli allagamenti portativi talora dalle piogge ; e avremmo potuto diffondere col candelino la fiamma su tutta o quasi tutta la superficie dell' acqua . Ma se non era così copiosa l' uscita spontanea dell' aria da dare questo bello spettacolo , lo era abbastanza perchè potessimo riempirne a talento , siccome fu fatto , le nostre boccie : una delle quali feci vedere ad accenderla un' ora dopo , essendo di là partiti ; le altre ben custodite me le recai a Pavia ad oggetto di esaminar quell' aria a più bell' agio , e con mag-

gior attenzione. Avrei desiderato per compimento, e per dare un bello spettacolo sul luogo, di avere un imbuto di ferro assai largo con canna stretta ed alta; perchè coprendo con questo le fiamme del terreno ancora asciutto, ciò che spente le avrebbe, avrei messo fuoco col candelino all'aria sulla cima del cannello, da cui uscendo essa affollata con impeto formato avrebbe un altissimo e vaghissimo getto di fiamma.

Quello de' compagni, cui le sperienze mie comunque decisive non finivan di appagare, perchè prevenuto per il suo petrolio, faceva intanto scavare d'attorno, e incontrata una terra nericcia, credette aver trovato quel che cercava, e senza neppur esitare, ci mostrò detta terra come pregna di un tal bitume. L'odore già era per lui di vero petrolio, agli altri sembrava pure che annunciasse qualche cosa di simile; a me pareva, e non pareva. Si ebbe dunque cura di raccogliere varj pezzi di questa terra nera d'attorno all' un sito e all' altro dove ardevan le fiamme, e a diversa profondità, per quindi analizzarla. Ma quale sorpresa poi quando fu trovato, che gettata sui vivi carboni punto non metteva fiamma? E come rimase più sorpreso ancora il nostro Mineralogo, quando sottoposta avendola alla distillazione, presenti noi tutti che fummo compagni nel viaggio, non passò neppur una goccia di olio? Ecco quali furono i prodotti di 6 oncie di tal terra: 1.º dan. $4\frac{1}{2}$ di acqua limpida con un odore accostantesi a quello dell'acido marino. 2.º dan. 7 di acqua simile con un poco di odore empireumatico. Nè l'una nè l'altra fece effervescenza cogli acidi. 3.º dan. 2 di flemma gialliccia con odore empireumatico più forte. Effervescenza cogli acidi. 4.º $\frac{1}{2}$ dan. di spirito volatile acquoso ed empireumatico: effervescenza più forte. 5.º rimasero in fine nella storta oncie 4 dan. 17. di terra nera abbruciata solubile in parte nell'acqua forte. Vi furono 17 dan. di perdita, non essendosi raccolti i prodotti aeriformi, che debbono essere stati in parte aria fissa, e in parte aria infiammabile. E' notevole, che prodotti poco dissimili ebbe il Sig. Baron *Dietrich* dalla terra nera da lui raccolta intorno ai fuochi di Pietra-mala (a); e già io

(a) *Lettres sur la Mineralogie etc.* pag. 421.

credo che non molto diversi si ottengano da ogni terra grassa.

Poniamo ora il caso che quella nostra terra di Velleja avesse realmente fornito del petrolio, in vece che non ne ha dato nè punto nè poco, certo i suoi fautori, i sostenitori dell' antica comune sentenza avrebber menato festa, avrebbero se non relegata del tutto la mia aria infiammabile, poichè la so vedere e toccare, l'avrebbero lasciata in disparte, poco o nulla concesso avrebbero a quella, e tutto al diletto loro bitume: senza forse cercare se tale terra ne conteneva abbastanza per somministrar l'alimento alle fiamme di cui si tratta; senza troppo badare se dette fiamme rassomiglino a quelle del petrolio, o piuttosto a quelle della mia aria infiammabile. Io però avrei fatto loro rimarcare, che nel luogo medesimo ove ardon le fiamme, non si trova neppure la detta terra nera, bensì una terra arida e secca mezzo calcinata; che quelle fiamme non dan fumo nè fuliggine sensibile, e quasi nulla di odore, quando all' incontro il petrolio, siccome ogn' altro bitume, produce fiamma molto fuliginosa e fetente. Dovendo pertanto convenire che non può essere il petrolio in sostanza che bruci a fior di terra, o entro la medesima, farebber ricorsi ai vapori di esso provenienti da maggiore profondità. Ma è forse il petrolio volatile come gli oli essenziali delle piante? Anzi no. E poi o questi vapori sono condensabili, e rimaner dovrebbero nell' acqua quando vien allagato il terreno che li tramanda, e soprannuotarvi offerendoci uno strato di petrolio, il che non si osserva; o non sono condensabili, ma permanentemente elastici, tal che scappano dall' acqua in forma di gallozzole, che è quello che si osserva di fatto; ed ecco, ripiglio, un vero fluido aeriforme, ecco la mia aria infiammabile. E che m' importa in fondo, quando è provato che ivi esiste, e ch' è dessa che arde, d' onde provenga? Io stesso non ho attribuito sempre l' origine dell' aria infiammabile, che chiamo nativa, alla lenta decomposizione delle sostanze vegetabili ed animali, di que' corpi insomma da quali anche per distillazione si ricava una

simile aria (a)? Tra questi corpi son certamente gli olj e i bitumi. Che anzi opino essere appunto la parte oleosa delle anzidette sostanze vegetabili ed animali o la sola o la principale che fornisce tanto col processo naturale quanto coll' artificiale l' aria di cui si tratta. Non escludo io dunque il petrolio: esso, come gli altri olj, come ogn'altra sostanza infiammabile può decomponendosi produrre aria infiammabile; e quando quella, che si trova in quantità strabocchevole sotto i terreni ardenti di Pietra-mala, e sotto quelli di Velleja, di che non v'è più luogo a dubitare, fosse così prodotta, vorrebbe dirsi per questo che è petrolio quel che ivi arde e fiammeggia? A questa maniera quando io accendo l'aria che proviene da uno stagno, sul cui fondo trovansi legni ed erbe infradiciate che l'hàn prodotta, potreste dire che sono i legni e l'erbe che dan la fiamma che vi so vedere; ma chi ha sano senso, chi non ama la confusione, distinguerà l'ardere immediato di tali corpi, e l'ardere dell'aria infiammabile già estratta da essi e raccolta a parte.

Così avrei incalzato questionando i partigiani del petrolio, se fosse loro riuscito d'incontrarne ne' luoghi de' terreni ardenti, o lì presso; ma dubito che si fossero ancora arresi, tanto può una preconcepita opinione. Ora però che per quanto li sia cercato non se n'è rinvenuto punto nè poco, è finita ogni quistione, e la causa della mia aria infiammabile, che mi si dà vinta dal compagno ormai convertito, dovrà finalmente trionfare di quanti aderenti possano ancora trovarsi all'antica opinione.

Ho detto ch'io mi proponeva di esaminare più attentamente ritornato a casa l'aria infiammabile raccolta sopra il terreno ardente di Velleja: or sia pregio dell'opera il qui esporre brevemente quello che ho trovato. Quest'aria dunque arde con una fiamma lambente azzurrognola, un po' più chiara e più grande però di quella che dà ordinariamente l'aria cavata dai fondi d'acqua stagnante. Come questa, e forse più, è dura ad accenderli colla scintilla elettrica; e com'

(a) Veggansi le mie *Lettere sull'aria infiammabile nativa delle paludi*, e le note all'articolo *Aria infiammabile* nel Dizionario di Chimica del Sig. Macquer tradotto dal Sig. Scopoli.

essa vuol esser mista per lo meno a otto volte tanto d'aria atmosferica. Non manda odore sensibilmente diverso da quello dell'aria infiammabile dei fossi; bensì dà qualche poco di fuliggine, che questa non dà. Per tale proprietà, e per quella della fiamma più chiara e più grande s'accosta un poco all'aria infiammabile che si ricava colla distillazione sia dagli olj puri, sia dalle sostanze vegetabili ed animali. Intorno a che se si riflette come l'aria infiammabile medesima della distillazione, la quale ha un puzzo empireumatico insopportabile ed è estremamente fuliginosa, va perdendo di quel puzzo e di quella fuliginosità a misura che si lava e si sbatte nell'acqua, come ho scoperto, accostandosi sempre più anche pel colore della fiamma all'aria nativa delle paludi, che è prodotta da una lenta e spontanea decomposizione delle medesime sostanze; se si riflette, dico, a ciò si verrà a comprendere che non differiscono sostanzialmente tra loro queste arie, e che quella del nostro terreno ardente già molto più vicina all'aria nativa delle paludi che all'altra della distillazione, se avesse come la prima i suoi natali e la culla nell'acqua, terrebbe con essa una perfetta rassomiglianza; e che l'acquisterebbe fors'anche dopo, ove sol le toccasse di soggiornare sott'acqua lungo tempo.

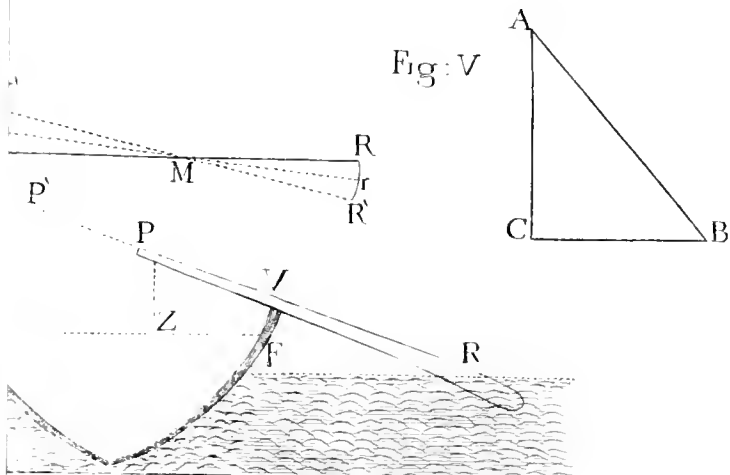
FINE del Tomo Secondo.

AVVERTIMENTO.

LE Tavole disegnate per la Parte I. debbono collocarsi unite in fine del I. Volume di questo II. Tomo coll'ordine delle pagine chiamate in testa, e quelle della Parte II. in fine del II. Volume ; e la Tavola contrassegnata per la Parte I. e II. è comune ad entrambi i Volumi , e va messa in calce d' ambidue.



Fig: V



BONATI Tom: II pag: 676

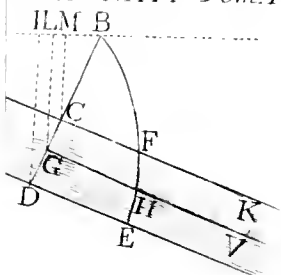
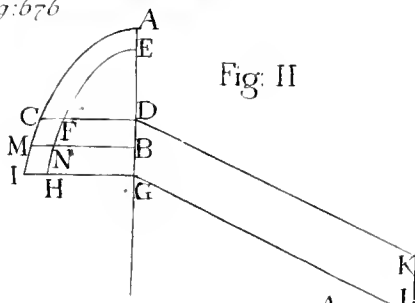


Fig: II



III

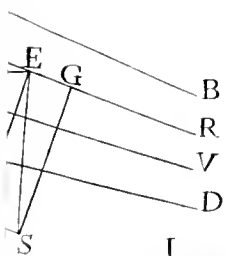


Fig: IV

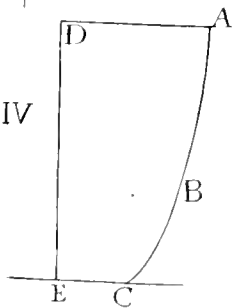
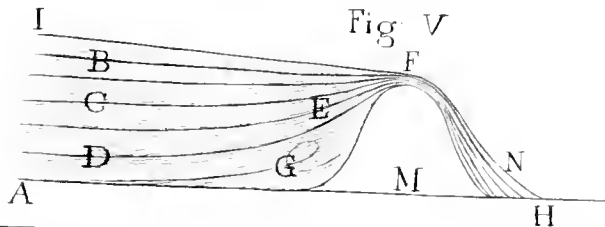
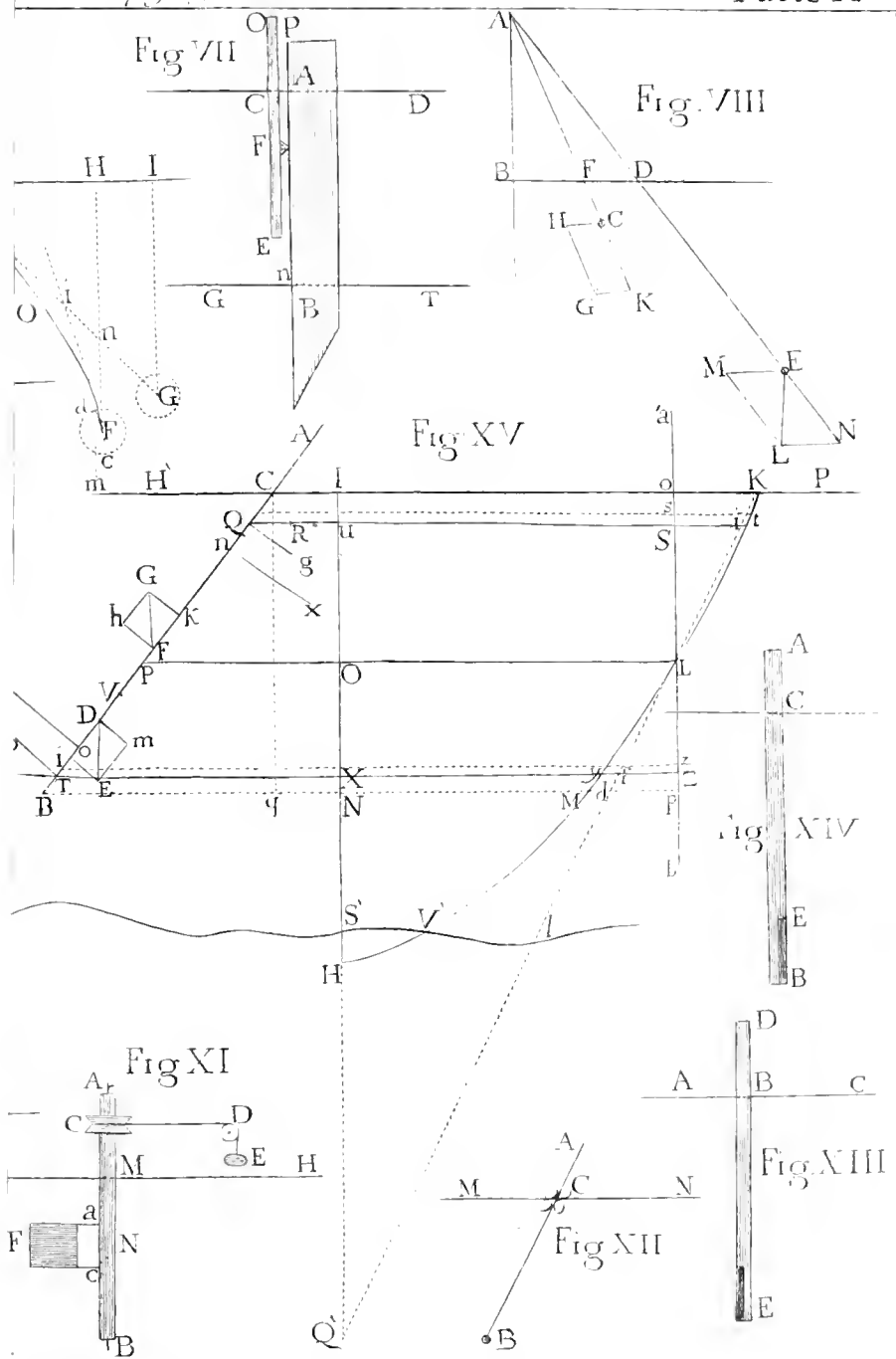


Fig: V





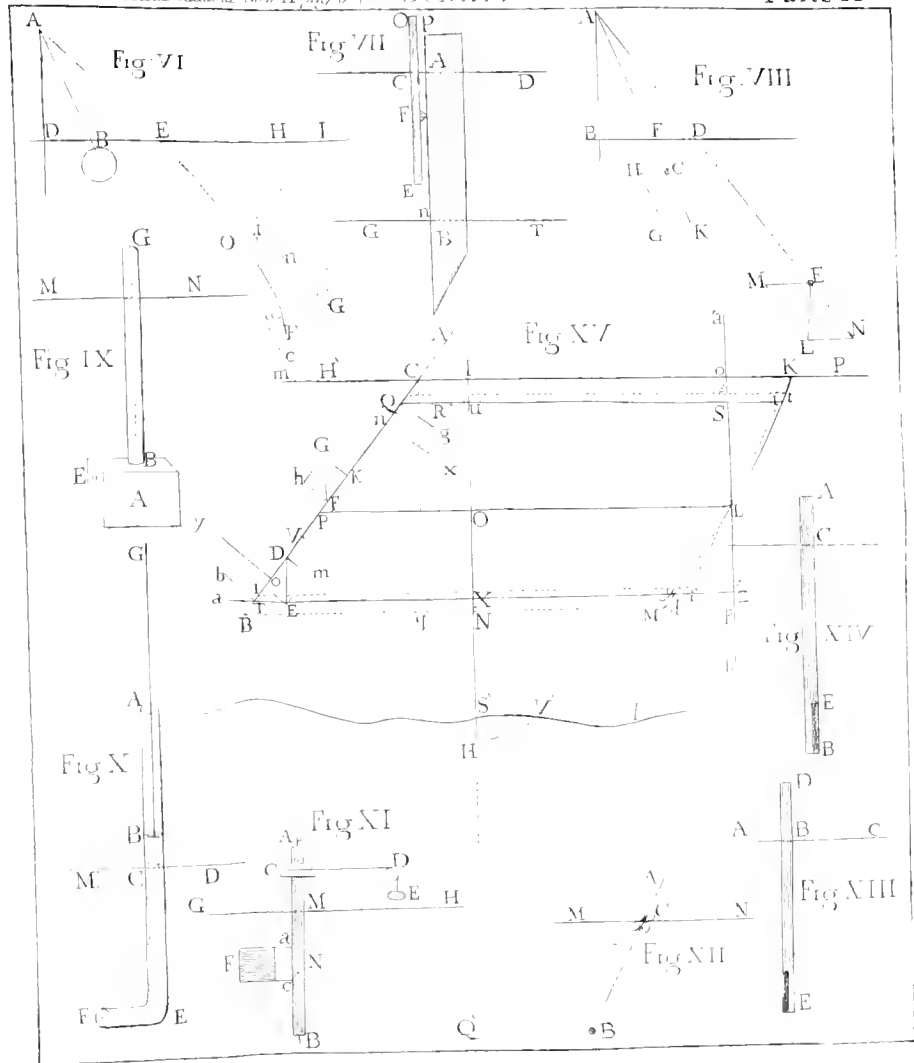
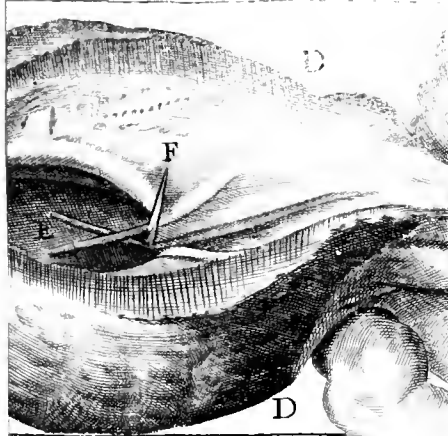
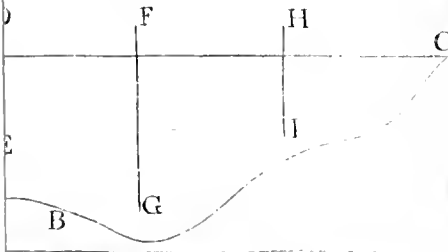
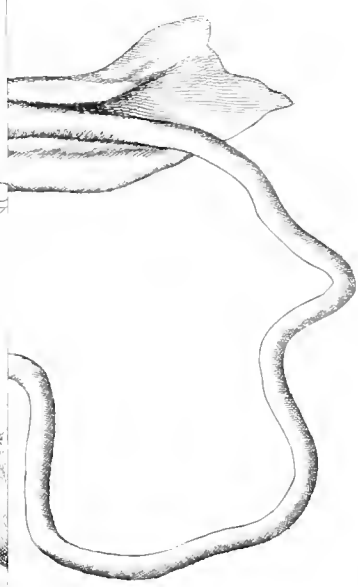
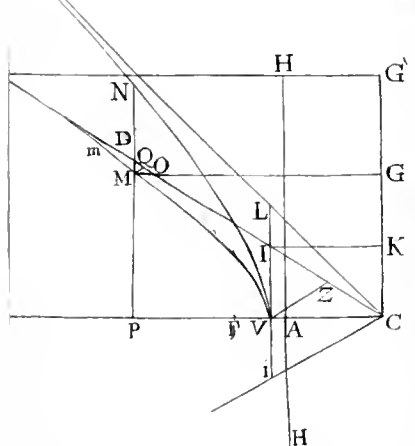


Fig: XVII



Tom: II pag: 749

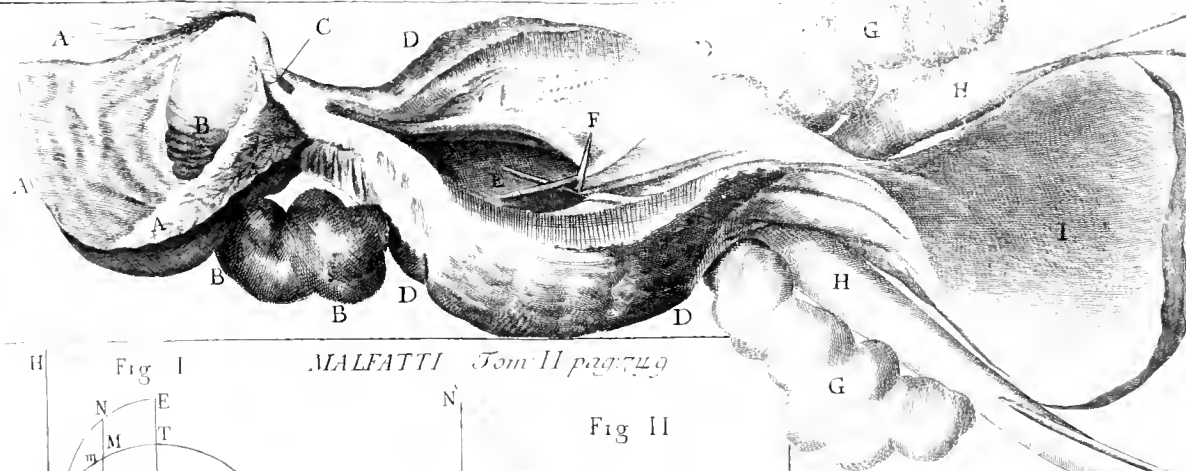
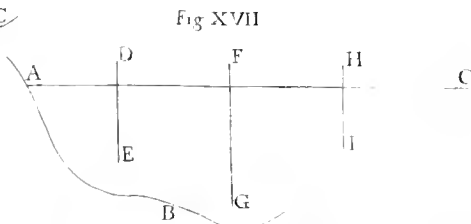
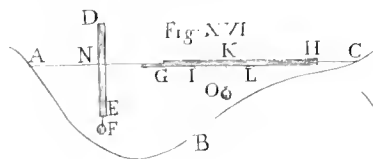
Fig: II



Tom: II pag: 846



BOVATI



SCARPA Tom II pag. 800

MALFATTI Tom II pag. 749

